

SÉRIE A, N° 3042

N° D'ORDRE

3914



THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M^{me} Florence DESTOUCHES-AESCHLIMANN

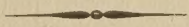
1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA NOTION DE SYSTÈME PHYSIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 juin 1957 devant la Commission d'Examen.

MM. DE BROGLIE *Président.*

SOLEILLET
M^{me} TONNELAT } *Examineurs.*



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

—
1960

SÉRIE A, N° 3042
N° D'ORDRE
3914

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Mme Florence DESTOUCHES-AESCHLIMANN

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA NOTION DE SYSTÈME PHYSIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 juin 1957 devant la Commission d'Examen.

MM. DE BROGLIE *Président.*

SOLEILLET
Mme TONNELAT } *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1960

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Doyen..... J. PÉRES.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	QUENEY.....	T Météorologie et Dynamique atmosphérique.
E. DARMOIS.....	T Enseignement de Physique.	GALLIEN.....	T Embryologie.
FOCH.....	T Mécanique physique et expérimentale.	EICHHORN.....	T Biologie végétale (P. C. B.).
PAUTHENIER.....	T Electrotechnique générale.	DE CUGNAC.....	T Biologie végétale. (P. C. B.).
De BROGLIE.....	T Théories physiques.	M ^{lle} CAUCHOIS.....	T Chimie physique.
JOB.....	T Chimie générale.	THELLIER.....	T Physique du Globe.
PRENANT.....	T Anatomie et Histologie comparées.	AUDUBERT.....	T Electrochimie.
GARNIER.....	T Géométrie supérieure.	L'HÉRITIER.....	T Génétique.
PÉRES.....	T Mécanique des fluides et applications.	GRIVET.....	T Radioélectricité.
LAUGIER.....	T Physiologie générale.	PONCIN.....	T Mécanique des fluides.
M. CURIE.....	T Physique (P. C. B.).	THIERY.....	T Mécanique appliquée.
BARRABÉ.....	T Géologie structurale et Géologie appliquée.	DUBREIL.....	T Arithmétique et Théorie des nombres.
G. DARMOIS.....	T Calcul des probabilités et Physique mathématique.	QUELET.....	T Chimie organique.
BOURCART.....	T Géographie physique et Géologie dynamique.	CAONHARD.....	T Mécanique des fluides.
PLANTEFOL.....	T Botanique.	CHAMPETIER.....	T Chimie macromoléculaire.
GRASSÉ.....	T Evolution des êtres organisés.	CUVILLIER.....	T Géologie structurale et Géologie appliquée.
PRÉVOST.....	T Chimie organique.	JUNG.....	T Pétrographie.
BOULIGAND.....	T Application de l'Analyse à la Géométrie.	TRILLAT.....	T Microscopie et diffraction électronique.
CHAUDRON.....	T Chimie appliquée.	WIEMANN.....	T Chimie organique structurale.
WYART.....	T Minéralogie.	JACQUINOT.....	T Spectroscopie et Physique céleste.
TEISSIER.....	T Zoologie.	VASSY.....	T Physique de l'atmosphère.
MANGENOT.....	T Biologie végétale.	DESTOUCHES.....	T Théories physiques.
P. AUGER.....	T Physique quantique et Relativité.	M. PRUVOST.....	T Géologie.
MONNIER.....	T Physiologie des fonctions.	AMIEL.....	T Chimie (P. C. B.).
PIVETEAU.....	T Géologie.	HOCART.....	T Minéralogie.
ROCARD.....	T Physique (E. N. S.).	J.-P. MATHIEU.....	T Physique (P. C. B.).
H. CARTAN.....	T Mathématiques (E. N. S.).	COUTEAUX.....	T Biologie animale (P. C. B.).
LAFITTE.....	T Chimie générale.	MAY.....	T Biologie animale (P. C. B.).
FAYARD.....	T Mécanique générale.	CHOQUET.....	T Calcul différentiel et intégral.
COULOMB.....	T Physique du Globe.	FELDMANN.....	T Biologie (P. C. B.).
M ^{lle} COUSIN.....	T Biologie animale (P. C. B.).	GUINIER.....	T Physique (P. C. B.).
CHRÉTIEN.....	T Chimie minérale.	JOST.....	T Biologie (P. C. B.).
P. DRACH.....	T Zoologie.	FORTET.....	T Calcul des probabilités.
KASTLER.....	T Physique.	SCHWARTZ.....	T Méthodes Mathématiques de la Physique.
EPHRUSSI.....	T Génétique.	CHOUARD.....	T Physiologie végétale.
WURMSER.....	T Biologie physico-chimique.	MALAVARD.....	T Aviation.
RIVIERE.....	T Géologie (S. P. C. N.).	BRELOT.....	T Calcul différentiel.
GAUTHERET.....	T Biologie végétale (P. C. B.).	NORMANT.....	T Chimie (P. C. B.).
LUCAS.....	T Recherches physiques.	BÉNARD.....	T Chimie (P. C. B.).
A. THOMAS.....	T Biologie cellulaire.	BUVAT.....	T Botanique (E. N. S.).
ARNULF.....	T Optique appliquée.	DUGUÉ.....	T Statistiques mathématiques.
MAX MORAND.....	T Physique.	GELOSO.....	T Chimie (S. P. C. N.).
SOLEILLET.....	T Physique.	SOULAIRAC.....	T Psychophysiologie.
FORTIER.....	T Mécanique expérimentale des fluides.	ULRICH.....	T Physiologie végétale.
DANJON.....	T Astronomie.	MARÉCHAL.....	T Optique théorique et appliquée.
FROMAGEOT.....	T Chimie biologique.	KIRRMANN.....	T Théories chimiques.
LAPORTE.....	T Physique générale et Radioactivité.	CHADEFAUD.....	T Botanique.
JANET.....	T Mécanique analytique et Mécanique céleste.	DESTRIAU.....	T Physique (M. P. C.).
PETIT.....	T Biologie maritime.	M ^{lle} LE BRETON.....	T Physiologie générale.
		SALEM.....	T Mathématiques générales.
		LELONG.....	T Mathématiques générales.
		DEVILLERS.....	T Anatomie et Histologie comparées.
		EHRESMANN.....	T Topologie algébrique.
		FRANÇON.....	T Physique (M. P. C.).



GLANCEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	M. LÉVY.....	Physique théorique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M. P. C.).	LENORMANT.....	Physiologie.
PISOT	T	Calcul des probabilités.	M ^{me} CHAIX.....	Chimie biologique.
ROCH (E.).....		Géologie.	M ^{me} HUREL-PY. . .	Biologie végétale (P. C. B.).
SCHATZMANN.....		Astrophysique.	PIAUX.....	Chimie (P. C. B.).
TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.	BRUN.....	Mécanique expérimentale des fluides.
ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.	LEDERER.....	Chimie biologique.
JOLIOT.....	T	Physique nucléaire et Radio-activité.	M ^{me} DUBREIL-	
			JACOTIN.....	Mathématiques.
LENNUIER.....		Physique (P. C. B.).	M ^{me} LELONG-	
RIZET.....		Génétique.	FERRAND.....	Mathématiques (E. N. S.).
M ^{me} TONNELAT. . .		Théories physiques.	BELLAIR.....	Géologie (S. P. C. N.).
DIXMIER.....		Mathématiques (M. P. C.).	COTTE.....	T Physique (M. P. C.).
SOUCHAY.....		Chimie (P. C. B.).	J. E. DUBOIS.....	Chimie.
AIGRAIN.....		Physique (P. C. B.).	LAMOTTE.....	Zoologie.
BRUSSET.....		Chimie (P. C. B.).	LE ROLLAND.....	Mécanique des fluides.
			MICHEL ANDRÉ....	Chimie (P. C. B.).

Secrétaire général..... CH. MONIER.

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE



Digitized by the Internet Archive
in 2026

INTRODUCTION

La notion de « système physique », l'une des notions fondamentales de la Physique, prête à bien des difficultés et limite la validité de certaines théories, et l'on peut se demander si les obstacles rencontrés actuellement dans le développement de la Physique théorique ne sont pas inhérents à cette notion même.

C'est la notion de système physique qui caractérise l'objet d'étude de nombreuses théories et notamment des théories quantiques. Or, ces théories qui tendent à devenir universelles sont arrêtées dans leur extension par le fait que le système physique étudié devrait s'élargir sans cesse pour permettre d'augmenter la précision de la description théorique, alors que l'univers dans son ensemble ne peut pas être assimilé à un système physique. Le développement historique de la Physique théorique nous montre la suite ininterrompue des efforts déployés pour élargir la notion primitive de « système mécanique » de la Mécanique newtonnienne des points matériels et des solides indéformables.

Une autre tendance des théories physiques, tendance dite « cosmologique » opposée à la précédente, conduit à envisager l'univers dans son ensemble et à décrire des points matériels soumis au « champ » créé par l'ensemble de l'univers. Ici la notion de système physique est réduite à son minimum d'extension, un point c'est-à-dire une partie insécable, et la difficulté réside alors dans la description d'un système non limité à un seul point.

Ainsi toute théorie physique, qu'elle soit une théorie à système physique ou une théorie cosmologique se trouve arrêtée dans sa tendance à l'universalisation par la notion même de système physique. De plus, les deux méthodes de schématisation ne peuvent se recouvrir ni être réunies. En Microphysique, une autre

difficulté s'ajoute à ces difficultés générales : toute prise de connaissance sur un système physique observable s'effectue au moyen d'un appareil de mesure que manipule le physicien et qui dans une description phénoméniste, doit être soigneusement distingué du système observé. On ne peut donc pas considérer l'univers pris dans son ensemble comme un système observable et il semble bien que se trouve ici la racine de nombreuses difficultés rencontrées dans le développement actuel des théories physiques.

Pour étudier la notion de système physique, il faut partir de la Mécanique classique, cette théorie physique ayant servi de modèle à toutes les autres. Nous y voyons se dessiner la distinction entre théorie à système physique de forme positiviste et théorie cosmologique de forme réaliste où surgissent déjà les difficultés fondamentales liées à la notion de système physique. Passant ensuite à la Mécanique ondulatoire non relativiste, on introduit les exigences d'observabilité et les quanta. On est conduit à examiner ce qui subsiste en Mécanique ondulatoire de la structure de la Mécanique classique et à tenir compte du rôle inéliminable de l'appareil de mesure dans la description théorique, fait qui a pour conséquence l'association d'un opérateur linéaire à chaque grandeur physique. Cette structure affaiblie de la théorie est disjointe des notions proprement quantiques dont le contenu original peut être mis par exemple sous la forme de la relation de non-commutation entre une coordonnée et son moment conjugué avec l'introduction de la constante de Planck.

On peut alors examiner quelles conséquences dérivent de l'utilisation de la notion de système physique dans la description des phénomènes physiques. Pour remédier à la situation artificielle que crée l'emploi de cette notion, on est conduit à modifier profondément la représentation d'un corpuscule ou partie insécable d'un système physique. La représentation d'un corpuscule par un point, même avec l'extension que permet l'emploi des variables libres, s'avère partielle; elle fournit seulement une représentation géométrique qu'il faut compléter par une représentation physique consistant en une fonction. On est ainsi amené à tenter de construire une théorie fonctionnelle, ce qui rejoint les préoccupa-

tions de M. Louis de Broglie dont la théorie de la double solution fournit une réalisation de théorie fonctionnelle ainsi que celles de M. Heisenberg dont la théorie non linéaire peut être considérée comme une autre réalisation de théorie fonctionnelle. On a examiné ici d'abord le cas d'une théorie non relativiste et sans spin, ce qui est certainement insuffisant, puis l'on a introduit le spin, et ensuite les exigences relativistes qui permettent de décrire la notion de corpuscule d'une façon plus approfondie. Il faut alors faire intervenir le champ électromagnétique et d'autres champs analogues, on quitte le domaine de la Mécanique. Les trois premières parties de ce travail sont limitées à des questions purement mécaniques et s'arrêtent au seuil du domaine plus large que constitue la recherche d'une théorie des corpuscules élémentaires et des champs. Une quatrième partie, au contraire, fait intervenir le champ électromagnétique non linéaire et les photons.

Cependant, même en se limitant à la Mécanique, il est très instructif de comparer entre elles diverses théories, car c'est de telles confrontations qui découvriront des ouvertures vers la construction de théories nouvelles. Nous avons divisé en trois parties cette étude sur la notion de système physique en Mécanique : une première partie consacrée à la Mécanique classique, une seconde partie à la Mécanique ondulatoire et à ses rapprochements avec la Mécanique classique; une troisième partie concerne la théorie fonctionnelle des corpuscules. Enfin une quatrième partie traite de l'électromagnétisme non linéaire et des photons en théorie fonctionnelle.

PREMIÈRE THÈSE

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE CLASSIQUE

CHAPITRE I

LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE NEWTONNIENNE

1. **Hypothèse sur l'espace et le temps.** — En Physique classique et en particulier en Mécanique newtonnienne, on admet que l'espace physique est un espace euclidien, le même quel que soit l'observateur considéré. On admet des résultats analogues sur le temps, à savoir qu'il existe un temps universel, le même pour tous les observateurs et pour tous les phénomènes observés; ce temps est représenté par une variable numérique t parcourant l'ensemble des nombres réels. Le temps se mesure expérimentalement au moyen d'appareils appelés « dispositifs chronométriques ».

Nous supposons que nous savons ce que signifie la simultanéité de deux événements et que nous possédons des dispositifs expérimentaux permettant de repérer les simultanéités avec une précision convenable. Par suite nous pouvons faire correspondre, d'une manière univoque, une indication du dispositif chronométrique à un événement déterminé. Nous supposons en outre que l'index du dispositif chronomé-

trique parcourant le cadran dans le sens croissant, se déplace dans un sens en accord avec notre ordination intuitive des événements et dans le sens du passé vers l'avenir.

Nous appellerons *variable temporelle* ou *temps* la variable dont les valeurs nous sont données par la position de l'index sur le cadran gradué; nous la désignerons par θ .

La graduation peut être faite arbitrairement. Étant donnée une graduation à traits non nécessairement équidistants les uns des autres et un dispositif chronométrique, la graduation sera dite définir une *échelle de temps* relativement à ce dispositif; nous la désignerons par θ . L'indication du dispositif chronométrique correspondant à un événement sera dite *date de l'événement* relativement au dispositif chronométrique considéré. Enfin en effectuant un changement de graduation du cadran, on définira un *changement d'échelle de temps*. On peut adopter par exemple, une division logarithmique au lieu d'une division à traits équidistants.

Désignons par $[\theta_1]$ et $[\theta_2]$ deux échelles de temps différentes et cherchons la forme de la relation qui lie θ_2 à θ_1 . A un événement déterminé il doit correspondre une seule date, par suite si θ_1 est la date de l'événement relativement à l'échelle $[\theta_1]$ et θ_2 sa date relativement à l'échelle de temps $[\theta_2]$, il doit y avoir une correspondance biunivoque entre θ_1 et θ_2 . De plus pour que le temps que nous avons défini soit en accord avec notre ordination subjective des événements, il faut que θ_2 croisse en même temps que θ_1 . Donc θ_2 doit être une fonction croissante de θ_1 .

Pour définir objectivement le sens de variation de $[\theta_1]$, nous ferons appel à un phénomène physique tel que la désintégration radioactive.

Nous poserons donc :

$[\theta_1]$ étant une échelle de temps, la fonction $\theta_2 = \varphi(\theta_1)$ définit une échelle de temps $[\theta_2]$ si :

- 1° la fonction $\varphi(\theta_1)$ est une fonction croissante de la variable θ_1 ;
- 2° la relation $\theta_2 = \varphi(\theta_1)$ établit une correspondance biunivoque entre les valeurs θ_1 et θ_2 .

On dit aussi que la fonction φ définit un *changement d'échelle de temps*.

2. Système mécanique. — En Mécanique, on étudie le mouvement de certaines parties de l'Univers indépendamment du reste de

l'Univers; une partie qu'on peut ainsi séparer est appelée *système mécanique* ou *système physique matériel*. La Mécanique classique consiste en l'étude des systèmes matériels qui sont ou bien des ensembles *finis* d'objets usuels directement perceptibles par les sens ou bien des astres. On cherche à déterminer le mouvement de systèmes matériels connaissant certaines conditions pour ce mouvement. On expérimente sur quelques corps matériels et l'on cherche à exprimer les résultats des expériences par des lois qui seront valables aussi pour certaines catégories de corps matériels jouissant approximativement des mêmes propriétés que le corps sur lequel on a expérimenté. Afin de pouvoir ainsi généraliser, on est conduit tout d'abord à chercher une représentation géométrique de chacun des corps étudiés, c'est-à-dire à les schématiser au moyen de figures géométriques bien déterminées, puis à compléter cette schématisation géométrique par une schématisation des propriétés mécaniques.

Les corps matériels à notre échelle se présentent à nous comme continus et comme indéfiniment morcelables, mais ceci n'est qu'une apparence.

S'il est facile de représenter géométriquement des corps continus, la représentation des propriétés mécaniques sous forme continue conduit à des complications mathématiques qu'on évite en adoptant une représentation discontinue. Une telle représentation discontinue est d'ailleurs conforme à l'expérience d'après laquelle les corps n'ont que l'apparence de corps continus alors qu'en réalité ils sont formés d'un grand nombre de molécules (de l'ordre de 10^{22}), chacune de ces molécules étant formée de particules insécables.

Au point de vue géométrique, chaque particule peut être représentée par un point conformément à la définition d'Euclide : « Le point est ce qui n'a pas de partie ».

Ces considérations issues de l'expérience conduisent à admettre le principe suivant, dans l'énoncé duquel le terme « système mécanique » sera pris comme terme primitif (non défini).

POSTULAT I : PRINCIPE CLASSIQUE DE LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE. — *Tout système mécanique S est représentable géométriquement dans l'espace physique, qui est un espace euclidien à trois dimensions, par un ensemble E_S de points de cet espace.*

Il faut ensuite préciser quelle famille d'ensembles est susceptible de

constituer un ensemble E_s . A cet effet, trois constructions théoriques peuvent être envisagées :

1° Dans la première, on admet que tout système est représenté par un ensemble fini.

2° Dans la deuxième, on admet que tout système est représenté par des réunions de continus en nombre fini (un « continu » est un ensemble connexe fermé non réduit à un seul élément).

3° Dans la troisième construction, on admet qu'il existe une certaine mesure positive μ ayant une signification physique, et que tout système est représenté par un ensemble μ -mesurable de mesure non nulle (par la suite la mesure μ apparaîtra comme exprimant la masse d'inertie).

La première construction est celle qui correspond à l'atomisme classique (préquantique), la seconde celle qui correspond à la conception classique des milieux continus et la troisième correspond à une conception moderne de la Mécanique classique.

Nous ne développerons ici que la première de ces trois constructions, car c'est celle qui est la plus utile pour les comparaisons entre la Mécanique classique, la Mécanique ondulatoire et la Théorie fonctionnelle des corpuscules (théorie « meilleure » que la Mécanique ondulatoire usuelle que l'on cherche actuellement à construire). Par contre, si notre but était l'étude des principes de la Mécanique à notre échelle, il conviendrait d'examiner en détail la seconde et la troisième constructions, car la Mécanique des systèmes de points est insuffisante pour décrire les systèmes mécaniques à notre échelle à partir d'un système fini de points matériels classiques (d'une part, un théorème de Poincaré montre qu'on ne peut construire ainsi un corps solide élastique, d'autre part, on vérifie qu'il n'est pas possible d'obtenir des forces superficielles), et il faut se placer, soit dans le cadre des milieux continus, soit dans le cadre plus général des ensembles μ -mesurables.

Certains aspects de l'étude que nous allons développer s'étendent sans difficulté au cas des ensembles continus et au cas des ensembles μ -mesurables (qui interviennent par exemple dans les problèmes concernant les repères principaux, le solide principal, le repère fondamental). Par contre, certaines parties doivent être développées d'une toute autre façon dans le cas d'ensembles continus ou dans le cas d'ensembles mesurables (c'est par exemple le cas en ce qui concerne le principe des équations différentielles et ses conséquences). Nous devons nous limiter, et ces considérations ne seront pas exposées ici. Nous

nous bornerons au cas des systèmes finis de points matériels (ou éventuellement infinis dénombrables), car c'est seulement cette théorie qui sert de modèle aux théories de l'atomisme. Cette limitation nous conduit à admettre le postulat suivant :

POSTULAT II : PRINCIPE DE L'ATOMISME CLASSIQUE. — *L'ensemble E_s de l'espace euclidien qui représente le système mécanique S est un ensemble d'un nombre fini N de points, N étant fixé pour chaque S.*

DÉFINITION. — On appelle *points matériels* les points figurant le système S.

3. Le postulat de la Cinématique. — *Définition.* — Un point matériel est dit en mouvement par rapport à un trièdre T si au moins une de ses coordonnées x, y, z , par rapport à ce trièdre est variable avec le temps, c'est-à-dire si les coordonnées x, y, z , sont des fonctions du temps $x(\theta), y(\theta), z(\theta)$, qui ne sont pas toutes trois constantes.

L'expérience montre que pendant un court intervalle de temps un mobile conserve des positions voisines et qu'il ne peut sauter instantanément d'un point à un autre. Cette propriété s'énonce par la loi expérimentale suivante :

Loi de continuité du mouvement. — Pour toute distance ε choisie arbitrairement petite mais suffisamment grande pour être mesurable, on peut trouver un intervalle de temps η tel que si l'on fait deux mesures de position pendant cet intervalle, ces deux positions sont à distance l'une de l'autre inférieure à ε .

Si l'on supprime la condition physique relative à la distance ε , à savoir : « suffisamment grande pour être mesurable » et qu'on lui substitue la condition : « la distance ε peut être choisie arbitrairement aussi petite qu'on veut », on passe de la continuité physique à la continuité mathématique. On admettra cette condition comme une idéalisation venant généraliser les résultats physiques.

Nous admettons le postulat suivant qui est le principe fondamental de la cinématique et résulte directement d'expériences sur le mouvement des mobiles.

POSTULAT III : POSTULAT FONDAMENTAL DE LA CINÉMATIQUE. — *Il existe au moins une échelle de temps $[\tau]$ et un repère T tels que les coordonnées de tout point matériel par rapport à ce repère T soient des fonctions continues deux fois dérivables de la variable temporelle τ .*

Une échelle de temps $[\tau]$ satisfaisant à ce postulat est appelée *échelle de temps cinématique*. Dans ce qui suit nous ne considérons que de telles échelles de temps qui, on le démontre, se déduisent les unes des autres au moyen de fonctions continues croissantes deux fois dérivables. Un repère T satisfaisant au postulat est appelé *repère cinématique*.

4. **Le principe fondamental de la Mécanique.** — Poincaré a montré que le principe fondamental de la Mécanique était le principe des équations différentielles. On y parvient de la façon suivante : des expériences faites sur certains systèmes mécaniques simples (par exemple un chariot sur un plan horizontal ou incliné et tiré par une corde passant sur une poulie à l'extrémité de laquelle se trouve un poids, le chariot étant en mouvement soit dans l'air, soit dans un liquide; des dispositifs à poids plus ou moins compliqués, des observations astronomiques sur le système solaire, etc.), montrent que l'accélération d'un point mobile est égale à une fonction des positions et vitesses de ce point et des autres points du système. Par induction, on admettra qu'une telle relation a lieu pour tout système mécanique et l'on admettra à titre de postulat le principe suivant :

POSTULAT IV : PRINCIPÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Il existe au moins un repère cinématique T_1 tel que, dans son mouvement rapporté à ce trièdre T_1 et à une échelle de temps cinématique $[\tau]$, tout point matériel M_i prend, du fait de la présence d'autres points matériels M_j qui en sont à distance finie, une accélération Γ_i bien déterminée en grandeur, direction et sens par une fonction fixée Φ_i , qui ne dépend que des positions et des vitesses des différents points matériels $M_1, \dots, M_N$ situés à distance finie de M_i et du temps τ , soit*

$$(1) \quad \frac{d^2 M_i}{d\tau^2} = \Gamma_i(\tau) = \Phi_i(M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_N; \tau),$$

c'est-à-dire qu'on a pour régir le mouvement des N points matériels, le système différentiel suivant :

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = \Phi_{1,i}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_N, y'_N, z'_N; \tau), \\ \frac{d^2 y_i}{d\tau^2} = \Phi_{2,i}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_N, y'_N, z'_N; \tau), \\ \frac{d^2 z_i}{d\tau^2} = \Phi_{3,i}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_N, y'_N, z'_N; \tau), \end{cases}$$

($i = 1, 2, \dots, N$), où x_i, y_i, z_i , désignent les coordonnées du point matériel M_i rapportées au trièdre fondamental T_1 , et

$$x'_i = \frac{dx_i}{d\tau}, \quad y'_i = \frac{dy_i}{d\tau}, \quad z'_i = \frac{dz_i}{d\tau},$$

les composantes de la vitesse $\mathbf{v}_i$. L'ensemble de ces points M_i à distance finie les uns des autres constitue par définition un système mécanique (au sens strict).

Certains auteurs anciens ⁽¹⁾ donnaient aux vecteurs Φ le nom de *forces accélératrices*; ce terme n'est plus guère employé aujourd'hui, cependant il nous paraît commode pour désigner les fonctions Φ_i (à noter qu'une « force accélératrice » n'a pas la dimension d'une force, mais celle d'une accélération; de même la force vive n'a pas la dimension d'une force mais celle d'une énergie).

Les équations (1') constituent un système d'équations différentielles du second ordre; on a pour chaque point matériel M_i du système considéré trois équations scalaires, soit donc au total $3N$ équations, s'il y a N points matériels dont les distances mutuelles sont finies; le système différentiel est donc d'ordre $6N$.

5. Changement d'échelle de temps ou de repère. — Si l'on effectue un changement d'échelle de temps cinématique, c'est-à-dire si l'on passe de l'échelle $[\tau]$ à l'échelle $[\tau']$ au moyen d'une certaine fonction croissante, continue et deux fois dérivable φ , soit

$$\tau' = \varphi(\tau),$$

le postulat précédent demeure inchangé, mais la forme des fonctions Φ_i est modifiée.

De même si l'on effectue un changement de repère cinématique pour passer d'un repère T à un repère cinématique T' dont le mouvement est donné, le postulat IV subsiste, mais la forme des fonctions Φ_i est modifiée en vertu du théorème de composition des accélérations.

6. Remarques sur le principe des équations différentielles. — La notion de système physique joue un rôle essentiel dans le principe des équations différentielles. En même temps ce principe fournit une

(1) Notamment L. M. N. Carnot, S. D. Poisson, G. C. F. M. Riche de Prony, A. Transon (par contre, d'autres auteurs utilisent ce terme pour désigner les « quantités d'accélération », notamment E. et F. Cosserat).

définition d'un système physique mécanique : *Un ensemble S de points matériels sera un système mécanique si entre les points de cet ensemble le système d'équations différentielles ⁽¹⁾ se trouve adéquat.*

On peut encore exprimer ceci d'une façon différente : *Soit S_0 un ensemble de points matériels et soit S un sous-ensemble de S_0 tel qu'entre les éléments de S on puisse écrire un système d'équations ⁽¹⁾ décrivant adéquatement le mouvement des points du sous-ensemble S , alors S sera un système mécanique.*

En particulier si S_0 est un système mécanique, il admettra un sous-système S si le système d'équations différentielles de S_0 contient un sous-système d'équations qui se laisse résoudre indépendamment des autres équations du système : les équations du sous-système ne faisant intervenir effectivement que les positions et vitesses des points du sous-ensemble S . On voit alors que pour pouvoir décider si un ensemble S_1 de points matériels est un système mécanique ou non, il faut que les propriétés des fonctions Φ soient fixées. Or le principe des équations différentielles laisse indéterminée la forme des fonctions Φ . De nouveaux principes sont nécessaires pour fixer ces fonctions ; ils constituent les principes de la Dynamique.

7. Les principes de la Dynamique. — Étant donné que le principe des équations différentielles reste valable lors du passage du mouvement repéré par rapport à un trièdre T à celui repéré par rapport à un autre trièdre T' animé d'un mouvement connu par rapport à T (et ceci avec tout changement d'échelle de temps), les principes de la Dynamique s'énonceront au moyen des propriétés des fonctions Φ pour un repère fixé et une échelle de temps fixée. (On choisira un repère et une échelle de temps pour lesquels la forme des fonctions Φ est la plus simple.)

On admet habituellement les principes suivants ⁽¹⁾ :

POSTULAT Va : PRINCIPE DE L'INERTIE. — *Il existe un repère cinématique T_0 tel que :*

a. Tout point matériel M situé infiniment loin de tout autre point matériel a relativement à ce repère T_0 un mouvement infiniment voisin d'un mouvement rectiligne. (D'une façon plus précise, à tout nombre ε fixé, on peut faire correspondre un nombre positif r tel

⁽¹⁾ Voir J.-L. DESTOUCHES, *Les principes de la Mécanique classique* (C. N. R. S., Paris, 1948).

que M_i désignant tout autre point matériel, si $|MM_i| > r$, il existe une droite D fixe par rapport à T_0 telle que la distance de M à D soit inférieure à ε , et cela pour tout point matériel M situé à une distance supérieure à r de tout autre point matériel.)

b. Si sur la droite D on fixe une origine et une orientation, l'abscisse $x(\tau)$ de la projection du point M sur D considérée comme fonction de la variable temporelle τ est une fonction toujours croissante ou toujours décroissante (suivant le sens d'orientation choisi sur la droite D) tant que le point M demeure infiniment éloigné de tout autre point matériel, et cela pour tout point matériel M satisfaisant à cette condition.

c. Si l'on adopte une échelle de temps $[t]$ telle que la vitesse du point matériel M infiniment éloigné de tout autre point matériel soit constante, alors tout point matériel M' infiniment éloigné de tout autre point matériel a un mouvement infiniment voisin d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire que si un nombre positif ε' est fixé, il existe un nombre positif r' tel que $|\overrightarrow{M'M_i}| > r'$, pour tout point matériel M_i entraîne

$$\left| \frac{dx'}{dt} - v'_0 \right| < \varepsilon'.$$

POSTULAT VIa : PRINCIPE DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION. — a. Le mouvement étant rapporté au repère fondamental T_0 et à une échelle de temps privilégiée $[t]$, l'accélération $\mathbf{\Gamma}_{21}$ prise par le point M_1 et l'accélération $\mathbf{\Gamma}_{12}$ prise par le point M_2 en vertu du principe des équations différentielles, les deux points étant infiniment éloignés de tout autre point matériel, sont dirigées suivant la droite M_1, M_2 , soit

$$\mathbf{\Gamma}_{21} = \lambda \overrightarrow{M_2 M_1}, \quad \mathbf{\Gamma}_{12} = \mu \overrightarrow{M_1 M_2};$$

b. Les fonctions λ et μ sont de même signe :

$$\lambda, \mu > 0.$$

c. Les fonctions λ et μ ne dépendent que de r_{12} et de $\frac{dr_{12}}{dt}$ et éventuellement de t , où $r_{12} = |\overrightarrow{M_1 M_2}|$, soit

$$\lambda = \lambda\left(r_{12}, \frac{dr_{12}}{dt}, t\right), \quad \mu = \mu\left(r_{12}, \frac{dr_{12}}{dt}, t\right).$$

La forme classique du principe de l'action et de la réaction ne comprend que les parties *a* et *b*, mais ce principe est trop faible et doit être complété par la partie *c* pour que les forces d'interaction satisfassent aux conditions imposées par le *principe d'objectivité matérielle* introduit par Walter Noll ⁽¹⁾ selon lequel la forme fonctionnelle doit être la même dans tout repère. Ceci signifie, au point de vue physique, qu'un observateur ne doit pas pouvoir repérer s'il est en mouvement inertial ou non par l'examen des forces d'interaction; seuls les effets d'inertie permettent à l'observateur de repérer s'il est en mouvement non inertial. Il est facile de vérifier que le principe d'objectivité matérielle est rempli si et seulement si l'on ajoute la condition complémentaire *c* aux principes habituels.

POSTULAT VIIa : PRINCIPE DE LA MASSE. — *Considérons N points matériels dont les distances mutuelles sont finies, si chaque paire $M_i M_j$ de ces points peut être écartée infiniment loin des autres points, les accélérations relatives au repère fondamental T_0 et à une échelle de temps privilégiée $[t]$ prises par les points des paires ainsi isolées satisfont aux relations*

$$\frac{|\mathbf{\Gamma}_{ij}|}{|\mathbf{\Gamma}_{ji}|} = \frac{|\mathbf{\Gamma}_{ik}|}{|\mathbf{\Gamma}_{ki}|} \cdot \frac{|\mathbf{\Gamma}_{kj}|}{|\mathbf{\Gamma}_{tk}|}$$

qu'on peut écrire pour chaque triple M_i, M_j, M_k de points matériels du système des N points $M_1, \dots, M_N$.

POSTULAT VIIIa : PRINCIPE DE SUPERPOSITION. — *Si l'on considère un système formé de n points matériels dont les distances mutuelles sont finies, le point M_i subira, du fait de la présence des autres points une accélération $\mathbf{\Gamma}_i$ qui sera la somme géométrique des accélérations que prendrait le point M_i s'il était en présence de chacun des autres points pris isolément pour former avec chacun un système de deux points matériels :*

$$\mathbf{\Gamma}_i = \sum_j \mathbf{\Gamma}_{ji}.$$

8. La loi de la gravitation universelle. — Si en Mécanique rationnelle on ne fixe pas avec plus de précision les forces que ne le font

⁽¹⁾ Walter NOLL, Communication Colloque Berkeley, 1958; Communication Colloque Paris, 1959.

les postulats que nous venons d'énoncer, en Mécanique céleste il faut préciser d'une manière complète la loi suivant laquelle deux corps célestes exercent l'un sur l'autre une action. Newton dans l'intuition géniale qui a constitué une synthèse remarquable entre les mouvements à la surface de la Terre et les mouvements des corps célestes a énoncé la loi suivante comme s'appliquant à tout couple de masses; nous devons l'admettre comme un postulat supplémentaire :

POSTULAT IXa : LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE DE NEWTON. — *Entre deux points matériels M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2 , il s'exerce toujours une force attractive dirigée suivant la droite M_1M_2 , dite « force de gravitation », qui, en intensité, est proportionnelle aux masses m_1 et m_2 et inversement proportionnelle au carré de la distance des points M_1 et M_2 , soit*

$$F_{12} = K \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

r_{12} désignant la distance M_1M_2 , soit

$$r_{12} = \left| \overrightarrow{M_1M_2} \right|,$$

K est une constante dite constante de gravitation.

9. Principe du repère fondamental. — Le principe du repère fondamental peut être énoncé de deux façons qui, équivalentes en pratique, sont tout à fait distinctes en principe : d'une façon cosmologique et d'une façon positiviste. Sous forme cosmologique, ce principe s'exprimera ainsi :

POSTULAT Xa : PRINCIPE DU REPÈRE FONDAMENTAL, FORME COSMOLOGIQUE. — *Le repère fondamental T_0 (dont il est question dans les principes précédents) est le trièdre principal de l'ensemble de toutes les étoiles (ou encore de l'ensemble de l'univers).*

Cet « ensemble de toutes les étoiles » n'est pas directement accessible à la mesure, et c'est en cela que ce principe n'est pas positiviste.

Sous forme positiviste, il s'énoncera ainsi :

POSTULAT Xa' : PRINCIPE DU REPÈRE FONDAMENTAL, FORME POSITIVISTE. — *Le repère fondamental T_0 est un trièdre principal d'un ensemble d'étoiles suffisamment riche.*

En pratique, les étoiles paraissent former un solide dit *solide stellaire*, et le mouvement d'un repère fondamental T_0 défini pour un certain ensemble d'étoiles par rapport au solide principal d'un autre ensemble d'étoiles T'_0 est faible et pratiquement négligeable même pendant un temps assez long : les forces correctives pour le mouvement d'un système S rapporté d'abord à T_0 puis à T'_0 sont extraordinairement faibles.

En admettant ce principe sous sa forme première qui est une forme de caractère réaliste et en admettant la loi d'attraction universelle de Newton, on constitue une théorie cosmologique (théorie newtonienne), première théorie de l'univers dans son ensemble. Cette tendance s'affirmera plus nettement dans les théories cosmologiques liées à la relativité généralisée.

Et c'est au contraire, la tendance positiviste liée à la seconde forme de notre principe qui se trouvera encore renforcée en Microphysique avec l'interprétation orthodoxe de la Mécanique ondulatoire.

10. Critiques à ces principes. — On remarquera que ces principes ne sont pas très satisfaisants : il y a d'abord des surabondances (notamment certaines propriétés résultant du choix du repère fondamental), il y a surtout des hypothèses non physiquement réalisables, par exemple l'hypothèse de Mach selon laquelle on peut prendre des points matériels par paires, les envoyer à l'infini et mesurer leurs accélérations dans ces conditions.

Un exposé satisfaisant des principes devrait éviter des appels à des conditions physiquement irréalisables; nous devrions pouvoir considérer les systèmes physiques en entier tels qu'ils se présentent à nous, sans en envoyer des parties à l'infini. D'autre part, il faudrait tenir compte dès le début, du fait que le repère fondamental est un trièdre principal et non pas un trièdre quelconque : nous examinerons d'abord certaines propriétés d'un repère principal.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DES TRIÈDRES PRINCIPAUX

1. Introduction. — Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé l'exposé usuel des principes de la Mécanique et indiqué en quels points il n'était pas satisfaisant. Nous allons chercher à mettre ces principes sous une forme qui évite les inconvénients indiqués. Mais auparavant, nous examinerons quelques propriétés des trièdres principaux étant donné le rôle essentiel que joue la notion de trièdre principal dans l'énoncé du principe du repère fondamental.

Dans les considérations qui vont suivre, les masses ne seront que des multiplicateurs cinétiques choisis arbitrairement et nous apporterons des modifications aux choix des masses. C'est dans le prochain chapitre seulement que nous considérerons à nouveau des masses d'inertie. Nous supposerons n'avoir admis que les principes de la Cinématique classique (postulats I-III).

2. Propriétés d'un trièdre principal. — Un trièdre principal attaché à un système de points matériels est défini par les deux relations suivantes :

a. Le trièdre principal lié au solide principal a son origine au centre de gravité G du système des points matériels ;

b. Le trièdre principal T_p ainsi lié au solide principal a un moment cinétique relatif nul :

$$\sigma_{G,T_p} = 0.$$

Ce trièdre est fonction du choix $[\mu_i]$ des masses cinétiques des corpuscules du système car, en particulier, son origine G est définie par

$$(1) \quad \sum_i \mu_i \overrightarrow{GM_i} = 0,$$

et cette expression montre que G est fonction de ce choix des masses.

Nous traduirons le fait que le trièdre principal est fonction du choix des masses $[\mu_i]$ par l'écriture

$$T_p([\mu_i]).$$

On sait que les trièdres satisfaisant à ces deux conditions sont fixes les uns par rapport aux autres, pour un choix de masses donné une fois pour toutes.

En effet deux tels trièdres T_{p_1} et T_{p_2} ont déjà une origine G commune définie par (1). Etudions maintenant l'orientation de leurs axes respectifs. Pour cela supposons que nous ayons deux trièdres principaux définis par (1) et par la seconde condition qui s'explicite ainsi :

$$(2) \quad \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \mu_i \left[\frac{d\overrightarrow{GM_i}}{dt} \right]_{/T_p} = 0,$$

cette dernière condition exprimant que

$$\sigma_{G/T_p} = 0.$$

Rapportons le mouvement du second trièdre principal T_p au premier trièdre principal T_{p_1} pris comme repère intermédiaire; le vecteur instantané $\omega(\tau)_{T_p/T_{p_1}}$ suffit à définir ce mouvement puisque les deux trièdres ont même origine G . On montre aisément que la relation (2) n'est satisfaite que si le vecteur $\omega_{T_p/T_{p_1}}$ est nul. D'où ce résultat : *Lorsqu'on a trouvé un trièdre principal défini par les conditions (1) et (2), tout autre trièdre principal défini par les mêmes conditions aura même origine G et sera fixe par rapport à lui.*

Nous allons maintenant démontrer ce théorème :

THÉORÈME 1. — *Les trièdres qui satisfont aux conditions (1) et (2) sont indépendants de l'échelle de temps choisie, par suite les notions de solide principal et de trièdre principal sont des notions cinématiques.*

La condition (1) est indépendante de τ , donc de l'échelle de temps choisie. Quant à la condition (2), elle est linéaire et homogène par rapport à l'opérateur $\frac{d}{d\tau}$; or, si l'on effectue un changement de temps défini par la relation

$$\tau = f(\tau')$$

ou la relation inverse

$$\tau' = \varphi(\tau),$$

les opérateurs $\frac{d}{d\tau}$ et $\frac{d}{d\tau'}$ sont liés par

$$\frac{d}{d\tau'} = \frac{d\tau}{d\tau'} \frac{d}{d\tau},$$

donc, dans la condition (2), on pourra mettre en facteur $\frac{d\tau'}{d\tau}$, et l'on aura la relation (2) avec le paramètre τ' :

$$\sum_i \overrightarrow{\text{GM}_i} \wedge \mu_i \frac{d}{d\tau'} \overrightarrow{\text{GM}_i} = 0,$$

ce qui établit le théorème.

Établissons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Les trièdres définis par les relations (1) et (2) sont invariants dans un changement d'unité pour les masses.*

En effet, les relations (1) et (2) sont linéaires et homogènes par rapport aux μ_i et définissent les mêmes trièdres si dans (1) et (2) on remplace μ_i par

$$\mu'_i = k \mu_i.$$

3. Conditions pour qu'un trièdre donné soit trièdre principal d'un système donné. — Soit un système mécanique S et un trièdre T, le trièdre T peut-il être trièdre principal des points du système S pour un certain choix de masses $[\mu_i]$? Cette question est importante pour l'examen des principes de la Mécanique. Le mouvement du système S peut être repéré au moyen d'un trièdre T_0 , c'est-à-dire qu'on suppose données en fonction du temps les positions des points de S par rapport à T_0 ; de même le mouvement de T peut être donné par rapport à T_0 .

Si T est un trièdre principal pour un certain choix de masses, c'est-à-dire si T est un $T_p([\mu_i])$ alors on a les relations

$$\mathbf{P}_{/T} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_{0/T} = 0,$$

O désignant l'origine du trièdre T. La première de ces deux équations s'intègre immédiatement et donne

$$\sum_i \mu_i \overrightarrow{\text{OM}_i} = \mathbf{a}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}_i}$ sont des fonctions déterminées du temps qui se

calculent à partir des expressions des vecteurs $\overrightarrow{O_0 M_i}$ et de $\overrightarrow{O_0 \dot{O}}$; on peut donc poser

$$\overrightarrow{O M_i} = \mathbf{f}_i(\tau),$$

où $\mathbf{f}_i(\tau)$ est une certaine fonction vectorielle déterminée. De même les quantités $\overrightarrow{O M_i} \wedge \mathbf{v}_i$ sont des fonctions déterminées du temps qui se calculent à partir de $\left[\frac{dM_i}{d\tau} \right]_{T_0}$, de $\mathbf{f}_i(\tau)$, de $\overrightarrow{O_0 \dot{O}}$, de la rotation $\boldsymbol{\omega}$ de T par rapport à T_0 . On peut donc poser

$$\overrightarrow{O M_i} \wedge \mathbf{v}_i = \mathbf{g}_i(\tau),$$

où $\mathbf{g}_i(\tau)$ est une certaine fonction vectorielle déterminée ($\mathbf{v}_i$ désigne la vitesse de M_i par rapport à T).

Les équations exprimant que T est trièdre principal (sans avoir son origine au barycentre) deviennent avec ces notations

$$(3) \quad \sum_i \mu_i \mathbf{f}_i(\tau) = \mathbf{a}, \quad \sum_i \mu_i \mathbf{g}_i(\tau) = \mathbf{o}.$$

Elles expriment qu'il existe une relation linéaire entre les fonctions $\mathbf{f}_i(\tau)$ et une entre les fonctions $\mathbf{g}_i(\tau)$. Or si le mouvement de S par rapport à T_0 et celui de T par rapport à T_0 sont quelconques, il ne peut exister de telles relations, d'où ce théorème :

THÉORÈME 3. — *Un trièdre quelconque T ne peut être un trièdre principal d'un système mécanique S pour un certain choix des masses; les trièdres principaux $T_p[\mu_i]$ relatifs aux divers choix de masses ont des mouvements particuliers [ils satisfont aux deux équations (3)].*

4. Un trièdre qui est principal pour un choix de masses ne l'est pas pour un autre choix de masses. — Considérons maintenant un trièdre principal $T_p[m_i]$ pour un certain choix de masses $[m_i]$ et cherchons s'il peut aussi être trièdre principal pour un autre choix des masses $[\mu_i]$. Nous pouvons toujours placer l'origine de $T_p[m_i]$ au centre de gravité G. Alors par rapport à ce trièdre le mouvement du système S est déterminé; on peut poser

$$\mathbf{f}_i(\tau) = m_i \overrightarrow{O M_i}, \quad \mathbf{g}_i(\tau) = m_i \overrightarrow{O M_i} \wedge \mathbf{v}_i,$$

et ces fonctions données satisfont aux relations

$$\sum_i \mathbf{f}_i(\tau) = \mathbf{a}, \quad \sum_i \mathbf{g}_i(\tau) = \mathbf{o}$$

puisque $T_p[m_i]$ est trièdre principal pour le choix $[m_i]$ des masses. Si ce trièdre est aussi trièdre principal pour le choix $[\mu_i]$ des masses (sans avoir son origine au nouveau barycentre), en posant

$$\mu_i = \lambda_i m_i,$$

on déduit immédiatement les deux relations

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{f}_i(\tau) = \mathbf{a}, \quad \sum_i \lambda_i \mathbf{g}_i(\tau) = \mathbf{o},$$

où les λ_i sont des constantes positives et $\mathbf{a}$ un vecteur constant. On voit qu'en général il est impossible de remplir ces conditions.

Ce n'est que pour certaines fonctions $\mathbf{f}_i(\tau)$ et $\mathbf{g}_i(\tau)$ qu'on pourra satisfaire à de telles relations; donc :

En général un trièdre principal pour un certain choix de masses ne peut pas être trièdre principal pour un autre choix de masses, ceci pour un système mécanique S donné.

Ce n'est que si le mouvement de S est tel qu'entre les fonctions $\mathbf{f}_i$ et $\mathbf{g}_i$ on a des relations linéaires de la forme (3) que le trièdre est aussi trièdre principal (toutefois avec l'origine non située au barycentre) pour le choix μ_i de masses.

Ces deux relations expriment des équations de liaisons particulières : l'une est holonome (relation linéaire entre les coordonnées), l'autre est non holonome (conditions sur les moments cinétiques des divers points). Naturellement dans les relations précédentes tous les λ_i ne sont pas égaux entre eux (cas d'un changement d'unité), il y en a au moins deux qui diffèrent l'un de l'autre, car si tous les λ_i sont égaux entre eux, $T_p[\mu_i]$ est évidemment identique à $T_p[m]$, le coefficient λ venant se mettre en facteur dans les relations (1) et (2).

5. Relations entre trièdres principaux relatifs à différents choix de masses. — Effectuons maintenant le passage d'un trièdre principal défini par un certain choix de masses $[m_i]$ à un autre trièdre principal défini par un autre choix de masses $[\mu_i]$.

Le nouveau centre de gravité g est défini par

$$(4) \quad \sum_i \mu_i \vec{gM}_i = 0,$$

et la condition cinématique du trièdre principal se traduit par

$$(5) \quad \sum_i \vec{gM}_i \wedge \mu_i \left[\frac{d}{d\tau} \vec{gM}_i \right]_{/T[\mu]} = 0.$$

Revenons à l'origine G du trièdre principal défini par le premier choix des masses. La relation (4) s'écrit alors

$$(6) \quad \sum_i \mu_i \vec{Gg} = \sum_i \mu_i \vec{GM}_i$$

soit, en posant $\mu = \sum_i \mu_i$,

$$\mu \vec{Gg} = \sum_i \mu_i \vec{GM}_i.$$

Cette équation détermine le point g (barycentre des masses μ_i) à partir de G (barycentre des masses m_i). Si les masses μ_i diffèrent peu des masses m_i , ou si pour certaines valeurs de l'indice j on a $\mu_j = m_j$, alors il est plus commode de soustraire de l'équation précédente la condition exprimant que G est le barycentre des masses m_i , ce qui donne

$$(7) \quad \mu \vec{Gg} = \sum_i (\mu_i - m_i) \vec{GM}_i.$$

Le point g est d'autant plus voisin de G que la somme $\sum_i \mu_i$ est plus grande et que les μ_i s'écartent moins des m_i .

Pour évaluer (5) en fonction d'éléments rapportés au trièdre $T_p[m]$ calculons la vitesse relative $\mathbf{v}_{s,i}$ de M_i par rapport au trièdre d'origine g en fonction des vitesses par rapport au trièdre $T_p[m]$; en utilisant des formules de Cinématique bien connues :

$$\left[\frac{d\vec{GM}_i}{d\tau} \right]_{/T[m]} = \left[\frac{d\vec{Gg}}{d\tau} \right]_{/T[m]} + \boldsymbol{\omega} \wedge \vec{gM}_i + \mathbf{v}_{g,i}$$

où

$$\mathbf{v}_{g,i} = d \left[\frac{d\vec{gM}_i}{d\tau} \right]_{/T[\mu]}.$$

Moyennant quoi, la relation (5) s'écrit

$$(8) \quad 0 = \sum_i \vec{gM}_i \wedge \mu_i \vec{v}_{s,i} = \sum_i \vec{gM}_i \wedge \mu_i \left(\left[\frac{d\vec{GM}_i}{d\tau} - \frac{d\vec{Gg}}{d\tau} \right]_{T,m} - \omega \wedge \vec{gM}_i \right).$$

En vertu de (4) le terme

$$\sum_i \vec{gM}_i \wedge \mu_i \frac{d\vec{Gg}}{d\tau} = \left(\sum_i \mu_i \vec{gM}_i \right) \wedge \frac{d\vec{Gg}}{d\tau}$$

est nul, et la relation (8) s'écrit plus simplement sous la forme

$$(9) \quad \sum_i (\vec{GM}_i - \vec{Gg}) \wedge \mu_i \left\{ \frac{d\vec{GM}_i}{d\tau} - \omega \wedge (\vec{GM}_i - \vec{Gg}) \right\} = 0.$$

Développons les parenthèses en tenant compte de

$$\sum_i \mu_i \vec{GM}_i = \mu \vec{Gg}, \quad \sum_i \mu_i \frac{d\vec{GM}_i}{d\tau} = \mu \frac{d\vec{Gg}}{d\tau},$$

relations qui expriment que g est barycentre ; de cette façon les termes linéaires en M_i disparaissent au profit de g et l'on obtient ainsi

$$(10) \quad \sum_i \vec{GM}_i \wedge \mu_i \frac{d\vec{GM}_i}{d\tau} - \sum_i \vec{GM}_i \wedge \mu_i (\omega \wedge \vec{GM}_i) \\ = \vec{Gg} \wedge \mu \frac{d\vec{Gg}}{d\tau} - \mu \vec{Gg} \wedge (\omega \wedge \vec{Gg}).$$

Donc si l'origine du premier repère est G, celle du second repère est g définie par (8) et sa rotation ω déterminée par (10). Exprimons dans (10) les doubles produits vectoriels, il vient

$$(11) \quad \sum_i \vec{GM}_i \wedge \mu_i \frac{d\vec{GM}_i}{d\tau} - \sum_i \mu_i \vec{GM}_i^2 \cdot \omega + \sum_i \mu_i (\vec{GM}_i \cdot \omega) \vec{GM}_i \\ = \mu \left[\vec{Gg} \wedge \frac{d\vec{Gg}}{d\tau} - \vec{Gg}^2 \cdot \omega + (\vec{Gg} \cdot \omega) \vec{Gg} \right].$$

On peut écrire cette équation en mettant dans un membre tous les

termes contenant ω et dans l'autre les termes qui en sont indépendants, soit

$$(12) \quad \left(\mu \overrightarrow{Gg}^2 - \sum_i \mu_i \overrightarrow{GM_i}^2 \right) \omega + \sum_i \mu_i (\overrightarrow{GM_i} \cdot \omega) \overrightarrow{GM_i} - \mu (\overrightarrow{Gg} \cdot \omega) \overrightarrow{Gg} \\ = \mu \overrightarrow{Gg} \wedge \frac{d\overrightarrow{Gg}}{d\tau} - \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \mu_i \frac{d\overrightarrow{GM_i}}{d\tau}.$$

Introduisons le tenseur d'inertie, désignons par $\overset{\circ}{I}_{G,[\mu]}(S)$ le tenseur d'inertie en G pour le système S dont les points sont affectés des masses μ_i , et par $\overset{\circ}{I}_{G,[\mu]}(g)$ le tenseur d'inertie en G pour le point g affecté de la masse totale μ . De même désignons par $\sigma_{G,[\mu]}(S)$ le moment cinétique pris en G pour le système S avec les masses μ_i et par $\sigma_{G,[\mu]}(g)$ le moment cinétique de g affecté de la masse totale μ . Avec ces notations, l'équation (12) prend la forme

$$(13) \quad \left(\overset{\circ}{I}_{G,[\mu]}(S) - \overset{\circ}{I}_{G,[\mu]}(g) \right) \cdot \omega = \sigma_{G,[\mu]}(S) - \sigma_{G,[\mu]}(g).$$

On voit que la rotation ω dépend de la façon dont les points M_i sont écartés du barycentre g. Comme le trièdre de référence $T_p[m]$ est trièdre principal pour les masses m_i , on a $\sigma_{G,[m]}(S) = 0$ et l'on peut soustraire cette quantité au second membre de l'équation (13), ce qui donne comme second membre : $\sigma_{G,[\mu]-m}(S) - \sigma_{G,[\mu]}(g)$, ou, en explicitant :

$$(14) \quad \left(\overset{\circ}{I}_{G,[\mu]}(S) - \overset{\circ}{I}_{G,[\mu]}(g) \right) \cdot \omega = \sum_{ij} \overrightarrow{GM_i} \wedge (\mu_i - m_i) \frac{d\overrightarrow{GM_i}}{d\tau} - \mu \overrightarrow{Gg} \wedge \frac{d\overrightarrow{Gg}}{d\tau};$$

le premier terme du second membre est d'autant plus faible que les masses μ_i sont plus voisines des masses m_i .

Si l'on a déjà déterminé le point g par (6), alors ω est déterminé par la relation précédente. Si l'on veut au contraire obtenir directement l'équation qui détermine ω à partir des M_i et μ_i sans passer par l'intermédiaire de g, alors il faut multiplier les deux membres de l'équation (12) par $\mu = \sum_i \mu_i$, puis remplacer $\mu \overrightarrow{Gg}$ par sa définition (6), nous avons alors partout deux indices de sommation; désignons-les par i, j . Ajoutons maintenant membre à membre l'équation obtenue en échangeant le nom des indices de sommation, soit j, i puis réduisons

les termes semblables avec des mises en facteur. Le premier terme donne

$$\mu^2 \vec{G} \vec{g}^2 - \mu \sum_i \mu_i \vec{G} \vec{M}_i^2 = \sum_{ij} \mu_i \mu_j (\vec{G} \vec{M}_i, \vec{M}_i \vec{M}_j),$$

on ajoute les termes en i, j , il vient

$$(15) \quad \sum_{ij} \mu_i \mu_j [\vec{M}_i \vec{M}_j, \vec{\omega} - (\vec{M}_i \vec{M}_j, \vec{\omega}) \vec{M}_i \vec{M}_j] = \sum_{ij} \mu_i \mu_j \vec{M}_i \vec{M}_j \wedge \frac{d}{dz} \vec{M}_i \vec{M}_j.$$

Posons

$$\begin{aligned} \vec{G} \vec{M}_i &= x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \\ \vec{\omega} &= p \mathbf{i} + q \mathbf{j} + r \mathbf{k}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont les vecteurs unitaires du trièdre $T_p[m]$ d'origine G lié à la première répartition des masses $[m_i]$.

En écrivant la condition ci-dessus sur ce trièdre, nous obtiendrons, en notant v_{xi}, v_{yi}, v_{zi} les composantes de la vitesse du point M_i par rapport au trièdre $T_p[m]$ les trois équations suivantes qui traduisent la condition vectorielle (15)

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} (G_x) \quad & p \sum_{ij} \mu_i \mu_j [(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2] \\ & - q \sum_{ij} \mu_i \mu_j (x_i - x_j)(y_i - y_j) - r \sum_{ij} \mu_i \mu_j (x_i - x_j)(z_i - z_j) \\ & = \sum_{ij} \mu_i \mu_j (y_i - y_j)(v_{zi} - v_{zj}) - (z_i - z_j)(v_{yi} - v_{yj}), \\ (G_y) \quad & - p \sum_{ij} \mu_i \mu_j (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\ & + q \sum_{ij} \mu_i \mu_j [(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2] - r \sum_{ij} \mu_i \mu_j (y_i - y_j)(z_i - z_j) \\ & = \sum_{ij} \mu_i \mu_j [(z_i - z_j)(v_{xi} - v_{xj}) - (x_i - x_j)(v_{zi} - v_{zj})], \\ (G_z) \quad & - p \sum_{ij} \mu_i \mu_j (z_i - z_j)(x_i - x_j) \\ & - q \sum_{ij} \mu_i \mu_j (y_i - y_j)(z_i - z_j) + r \sum_{ij} \mu_i \mu_j [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \\ & = \sum_{ij} \mu_i \mu_j [(x_i - x_j)(v_{yi} - v_{yj}) - (y_i - y_j)(v_{xi} - v_{xj})]. \end{aligned} \right.$$

Le signe $\sum_{ij}$ indique qu'il faut faire la somme pour i variant de 1 à N et de même pour j . En vertu de la remarque selon laquelle ces équations sont homogènes par rapport à ces sommations, et en tenant compte d'autre part du fait que les termes pour lesquels $i = j$ apportent une contribution nulle, et que le terme ij est égal au terme ji , on peut dire aussi que les sommations $\sum_{ij}$ représentent les sommations de tous les termes pour des combinaisons sans répétition des indices.

Ces trois équations livrent p , q , r , par les formules de Cramer,

$$p = \frac{\Delta_p}{\Delta}, \quad q = \frac{\Delta_q}{\Delta}, \quad r = \frac{\Delta_r}{\Delta},$$

Δ étant fonction des seules coordonnées des corpuscules, et les Δ_p , Δ_q , Δ_r , étant des fonctions linéaires des vitesses. Pour calculer Δ , posons

$$X_{ij} = x_i - x_j, \quad Y_{ij} = y_i - y_j, \quad Z_{ij} = z_i - z_j,$$

Δ s'écrit alors

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{ij} \mu_i \mu_j (Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2) & - \sum_{ij} \mu_i \mu_j X_{ij} Y_{ij} & - \sum_{ij} \mu_i \mu_j X_{ij} Z_{ij} \\ - \sum_{ij} \mu_i \mu_j X_{ij} Y_{ij} & \sum_{ij} \mu_i \mu_j (X_{ij}^2 + Z_{ij}^2) & - \sum_{ij} \mu_i \mu_j Y_{ij} Z_{ij} \\ - \sum_{ij} \mu_i \mu_j X_{ij} Z_{ij} & - \sum_{ij} \mu_i \mu_j Y_{ij} Z_{ij} & \sum_{ij} \mu_i \mu_j (X_{ij}^2 + Y_{ij}^2) \end{vmatrix}.$$

Nous ferons désormais la convention que s'il y a N points matériels M_i , les sommes $\sum_{ij}$ comportent $\frac{N(N-1)}{2}$ termes.

Par exemple, dans le cas de deux corpuscules M_1 et M_2 , ce déterminant prend la forme

$$\begin{vmatrix} \mu_1 \mu_2 (Y^2 + Z^2) & - \mu_1 \mu_2 XY & - \mu_1 \mu_2 XZ \\ - \mu_1 \mu_2 XY & \mu_1 \mu_2 (X^2 + Z^2) & - \mu_1 \mu_2 YZ \\ - \mu_1 \mu_2 XZ & - \mu_1 \mu_2 YZ & \mu_1 \mu_2 (X^2 + Y^2) \end{vmatrix},$$

μ_1 et μ_2 étant évidemment les masses des corpuscules M_1 et M_2 et X , Y , Z , étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ sur le trièdre $Gxyz$. En développant, on trouve très facilement que cette expression est identiquement nulle. Mais déjà dans le cas de trois corpuscules, on trouve pour Δ

une expression non nulle : prenons comme plan de xy , le plan déterminé par les trois corpuscules ; alors tous les Z_{ij} sont nuls, et Δ aura pour expression

$$\sum_{ij} \mu_i \mu_j (X_{ij}^2 + Y_{ij}^2) \left\{ \sum_{ij} \mu_i \mu_j Y_{ij}^2 - \left(\sum_{ij} \mu_i \mu_j X_{ij}^2 \right) - \left(\sum_{ij} \mu_i \mu_j X_{ij} Y_{ij} \right)^2 \right\}.$$

Transformons la quantité entre crochets qui s'écrit dans le cas des trois masses

$$\begin{aligned} & \mu_1^2 \mu_2 \mu_3 (X_{12} Y_{13} - X_{13} Y_{12})^2 + \mu_2^2 \mu_3 \mu_1 (X_{23} Y_{12} - X_{12} Y_{23})^2 \\ & + \mu_3^2 \mu_1 \mu_2 (X_{13} Y_{23} - X_{23} Y_{13})^2. \end{aligned}$$

Ceci montre que, dans ce cas particulier, Δ possède une signification géométrique

$$\Delta = \sum_{mn} \mu_m \mu_n \overrightarrow{M_m M_n} \sum_{i=\substack{1,2,3 \\ jk}} \mu_i^2 \mu_j \mu_k \left| \overrightarrow{M_i M_j} \wedge \overrightarrow{M_i M_k} \right|^2.$$

Cette quantité ne saurait être nulle, et il en sera de même dans le cas d'un système de N points matériels ($N > 2$). En effet, ainsi qu'il a été vu dans la détermination du solide principal de référence, on peut toujours faire correspondre à une distribution de masses, un trièdre principal d'origine G , barycentre, dont la rotation ω est définie par rapport au trièdre fixe de référence, par ses composantes (p, q, r) sur ce trièdre, tirées des équations

$$\begin{aligned} I_1^2 p - I_2^2 q - I_3^2 r &= \sum_i m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right), \\ -I_1^2 p + I_2^2 q - I_3^2 r &= \sum_i m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right), \\ -I_1^2 p - I_2^2 q + I_3^2 r &= \sum_i m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right). \end{aligned}$$

Ces équations traduisent d'ailleurs l'équation tensorielle

$$\tilde{I}_G \cdot \omega = \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \overrightarrow{M_i W_i},$$

$\overrightarrow{M_i W_i}$ étant la vitesse de M_i par rapport au trièdre d'origine G équipollent au trièdre fixe de référence, et $\tilde{I}_G$ étant le tenseur d'inertie du système par rapport à G .

Comme à une répartition de plus de deux masses correspondra un trièdre principal unique, on conçoit aisément que $\Delta \neq 0$ dans le cas de

plus de deux masses, et qu'alors p , q , r seront parfaitement définis et auront les formes d'expressions indiquées ci-dessus :

$$p = \frac{\Delta p}{\Delta}, \quad q = \frac{\Delta q}{\Delta}, \quad r = \frac{\Delta r}{\Delta},$$

avec, par exemple :

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} \mu_i \mu_j [(y_i - y_j)(v_{zi} - v_{zj}) - (z_i - z_j)(v_{yi} - v_{yj})] - \delta - \varepsilon, \\ & \sum_{ij} \mu_i \mu_j [(z_i - z_j)(v_{xi} - v_{xj}) - (x_i - x_j)(v_{zi} - v_{zj})] + \beta - \eta, \\ & \sum_{ij} \mu_i \mu_j [(x_i - x_j)(v_{yi} - v_{yj}) - (y_i - y_j)(v_{xi} - v_{xj})] - \eta + \gamma, \end{aligned}$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} +\alpha & -\delta & -\varepsilon \\ -\delta & +\beta & -\eta \\ -\varepsilon & -\eta & +\gamma \end{vmatrix}.$$

On remarquera que les termes de la première colonne sont les composantes du vecteur

$$\vec{\pi} = d \sum_{ij} \mu_i \mu_j \overrightarrow{M_i M_j} \wedge \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M_i M_j}).$$

Cette dernière égalité a lieu sur le trièdre $T_p[m]$ et nous désignerons par π_1, π_2, π_3 , les composantes de $\vec{\pi}$ sur ce trièdre. Nous voyons donc que ω (de composantes $p = \omega_1, q = \omega_2, r = \omega_3$) a des composantes qui s'écriront sous les formes suivantes :

$$p = \omega_1 = U_1^1 \pi_1 + U_1^2 \pi_2 + U_1^3 \pi_3,$$

où les U_i^j sont les mineurs de Δ .

On déduit de l'expression de cette composante, celles des autres, et l'on a finalement

$$\omega_\lambda = U_\lambda^s \pi_s,$$

en faisant la convention usuelle d'Einstein, d'où

$$\omega = \vec{U} \cdot \vec{\pi}.$$

On obtient par dérivation

$$\omega'_\lambda = U_\lambda^{s'} \vec{\pi}_s + U_\lambda^s \vec{\pi}'_s.$$

Les U sont des fonctions des positions des points M_i , tandis que les π_s

sont des fonctions à la fois des positions et des vitesses des points (rapportés au trièdre $T_p[m]$), les $U'_k{}^s$ et π'_s seront donc par rapport au trièdre $T_p[m]$ respectivement, des fonctions des positions et des vitesses des points M_i , et des fonctions des positions, des vitesses et des accélérations des points M_i .

Nous avons ainsi complètement défini la transformation qui fait passer du trièdre $T_p[m]$ au trièdre $T_p[\mu]$ associés chacun à des répartitions de masses différentes pour un même système de N points matériels M_i .

6. Changement du solide principal par adjonction d'un système. —

Soit un système S_N de N points matériels, adjoignons-lui un système S_K de K points matériels de masses

$$\mu_{N+1}, \mu_{N+2}, \dots, \mu_{N+K}.$$

les masses des points de S_N demeurant inchangées. Examinons comment le solide principal du système S_N est modifié par cette adjonction. On peut ramener ce problème au précédent en posant $m_{N+j} = 0$, $m_i = \mu_i$ pour $i < N$ et en considérant S_N comme $S_{N+K}[m]$ et le système complété comme $S_{N+K}[\mu]$ avec les masses μ_i . Appliquons les formules (6) et (13); en désignant par G le barycentre de S_N , par G_s celui de S_K , par g celui du système total, par $\mathcal{M}$ la masse totale de S_N , par μ_s la masse totale de S_K , nous avons d'après (7)

$$(\mathcal{M} + \mu_s) \overrightarrow{Gg} = \sum_{i=N+1}^{N+K} \mu_i \overrightarrow{GM_i},$$

mais le second membre est égal à $\mu_s \overrightarrow{GG_s}$ en vertu de la définition du barycentre G_s d'où, pour déterminer le point g , l'équation

$$(17) \quad (\mathcal{M} + \mu_s) \overrightarrow{Gg} = \mu_s \overrightarrow{GG_s}.$$

L'équation (14) donne dans notre cas :

$$(18) \quad \left[\overrightarrow{I}_{G, [\mu]}(S_{N+K}) - \overrightarrow{I}_{G, [\mu]}(g) \right] \omega \\ = \sum_{i=N+1}^{N+K} \mu_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \frac{\overrightarrow{dGM_i}}{d\tau} - (\mathcal{M} + \mu_s) \overrightarrow{Gg} \wedge \frac{\overrightarrow{dGg}}{d\tau}.$$

Explicitons les quantités contenues dans cette équation, on a

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{I}}_{G, [\mu]}(S_{N+K}) \boldsymbol{\omega} &= \check{\mathbf{I}}_{G, [m]}(S_N) \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=N+1}^{N+K} \mu_i \left[\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{M}_i^2} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{M}_i} \cdot \boldsymbol{\omega}) \overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{M}_i} \right], \\ \check{\mathbf{I}}_{G, [\mu]}(g) \boldsymbol{\omega} &= (\mathcal{M} + \mu_s) \left[\overrightarrow{\mathbf{G}g^2} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\overrightarrow{\mathbf{G}g} \cdot \boldsymbol{\omega}) \overrightarrow{\mathbf{G}g} \right].\end{aligned}$$

Dans les deux formules précédentes, remplaçons g par son expression en fonction de G_s d'après la relation (17), puis remplaçons $\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{M}_i}$ par $\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s} + \overrightarrow{\mathbf{G}_s\mathbf{M}_i}$, supprimons les termes nuls en vertu de $\sum_i \mu_i \overrightarrow{\mathbf{G}_s\mathbf{M}_i} = 0$ qui exprime que G_s est le barycentre de S_K (ceci revient à appliquer les théorèmes de König), utilisons la remarque qui a conduit à la relation (17), réduisons les termes semblables, et définissons la masse réduite de S_K par

$$\mu_r = \mu \frac{\mathcal{M} \cdot \mu_s}{\mathcal{M} + \mu_s},$$

nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\left[\check{\mathbf{I}}_{G, [\mu]}(S_{N+K}) - \check{\mathbf{I}}_{G, [\mu]}(g) \right] \boldsymbol{\omega} &= \check{\mathbf{I}}_{G, [m]}(S_N) \boldsymbol{\omega} + \mu_r \left[\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s^2} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s} \cdot \boldsymbol{\omega}) \overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s} \right] \\ &\quad + \sum_{i=N+1}^{N+K} \mu_i \left[\overrightarrow{\mathbf{G}_s\mathbf{M}_i^2} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\overrightarrow{\mathbf{G}_s\mathbf{M}_i} \cdot \boldsymbol{\omega}) \overrightarrow{\mathbf{G}_s\mathbf{M}_i} \right],\end{aligned}$$

la sommation n'est autre que $\check{\mathbf{I}}_{G_s, [\mu]}(S_K) \cdot \boldsymbol{\omega}$. Transformons le second membre de (18) de la même façon, en introduisant G , et en éliminant g ; ce second membre est une différence de deux moments cinétiques $\sigma_{G, [\mu]}(S_K) - \sigma_{G, [\mu]}(g)$, qui devient ainsi

$$\sigma_{G, [\mu]}(S_K) - \sigma_{G, [\mu]}(g) = \mu_r \overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s} \wedge \frac{d\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s}}{d\tau} + \sum_{i=N+1}^{N+K} \mu_i \overrightarrow{\mathbf{G}_s\mathbf{M}_i} \wedge \frac{d\overrightarrow{\mathbf{G}_s\mathbf{M}_i}}{d\tau},$$

la sommation est un moment cinétique $\sigma_{G_s, [\mu]}(S_K)$. Après ces transformations, l'équation (18) devient

$$\begin{aligned}(19) \quad \left[\check{\mathbf{I}}_{G, [m]}(S_N) + \check{\mathbf{I}}_{G_s, [\mu]}(S_K) \right] \boldsymbol{\omega} &+ \mu_r \overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s^2} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s} \cdot \boldsymbol{\omega}) \overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s} \\ &= \sigma_{G_s, [\mu]}(S_K) + \mu_r \overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s} \wedge \frac{d\overrightarrow{\mathbf{G}\mathbf{G}_s}}{d\tau}.\end{aligned}$$

Cette équation fournit la valeur du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ dû à l'adjonc-

tion du système S_K au système S_N . La dissymétrie existant au second membre entre S_N et S_K provient du fait qu'on a rapporté le mouvement au trièdre $T_p[m]$, trièdre principal de S_N ; la symétrie réapparaît si l'on ajoute un terme $\sigma_{G,[m]}(S_N)$, qui est nul dans le repère choisi; l'équation (19) ainsi complétée se trouve valable pour tout repère T .

Si la masse totale ajoutée μ_s est infiniment petite devant la masse $\mathcal{M}$ du système S_N , le second membre est infiniment petit, tandis que les coefficients de ω au premier membre restent finis, les composantes du tenseur d'inertie de S_N étant supposées finies, et la rotation ω est infiniment petite, de l'ordre d'infinitude de la masse ajoutée.

7. Cas de l'adjonction d'un système infiniment éloigné. — Envisageons maintenant le cas où le système S_K est infiniment éloigné du système S_N , sa masse μ_s demeurant finie ainsi que les vitesses de ses points. Le passage du point G au point g , barycentre du système complété, est donné par la relation (17). Si le point G_s s'éloigne à l'infini, il en est de même de g (qui sera infiniment éloigné de G et de G_s), les trois points G , G_s , g demeurant alignés. Dans le mouvement par rapport à $T_p[m]$ d'origine G , le point g subit les accélérations de G_s à un coefficient multiplicatif près formé par le rapport des masses $\frac{\mu_s}{\mathcal{M} + \mu_s}$; la vitesse de g par rapport à $T_p[m]$ est liée à celle de G_s avec le même facteur; ceci s'établit en dérivant la relation (17).

Déterminons maintenant le vecteur rotation ω du trièdre principal du système complété $T_p[\mu]$ d'origine g par rapport au trièdre $T_p[m]$.

Considérons à cet effet l'équation (19). Le système S_K s'éloignant indéfiniment de G , examinons si le vecteur ω tend vers une certaine valeur limite. Pour cela projetons l'équation (19) sur le système d'axes $T_p[\mu]$ suivant : l'origine est en G , l'axe GX est dirigé suivant $\overrightarrow{GG_s}$, l'axe GY orthogonal à GX sera tel que $\frac{d\overrightarrow{GG_s}}{d\tau}$ soit dans le plan GXY , et l'axe GZ sera orthogonal au plan GXY et orienté de façon que le trièdre $GXYZ$ soit direct. Désignons par u_1 , u_2 , u_3 les vecteurs unitaires des axes de ce trièdre, nous avons

$$\overrightarrow{GG_s} = x u_1; \quad \frac{d\overrightarrow{GG_s}}{d\tau} = v_1 u_1 + v_2 u_2;$$

$$\omega = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \omega_3 u_3; \quad \sigma_{G_s,[\mu]}(S_K) = \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \sigma_3 u_3.$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$\overset{\Sigma}{J} = d \left[\overset{\Sigma}{I}_{G_s, [m]}(S_N) + \overset{\Sigma}{I}_{G_s, [\mu]}(S_K) \right]; \quad \mathbf{s} = d \boldsymbol{\sigma}_{G_s, [\mu]}(S_K),$$

avec ces notations l'équation vectorielle (19) donne les trois équations scalaires suivantes :

$$(20) \quad \begin{cases} J_1^1 \omega_1 + J_1^2 \omega_2 + J_1^3 \omega_3 = s_1, \\ J_2^1 \omega_1 + J_2^2 \omega_2 + J_2^3 \omega_3 + \mu_r x^2 \omega_2 = s_2, \\ J_3^1 \omega_1 + J_3^2 \omega_2 + J_3^3 \omega_3 + \mu_r x^2 \omega_3 = s_3 + \nu_2 \mu_r x. \end{cases}$$

Il est aisé de résoudre complètement ce système de trois équations linéaires à trois inconnues, mais si l'on se limite au cas où x croît indéfiniment, il suffit de calculer les termes principaux. Si le point G_s s'éloigne indéfiniment de G , la quantité x croît indéfiniment; prenons x comme infiniment grand principal, alors les J_j^i et les s_i sont finis par hypothèse; sur les équations (20) on voit alors que ω_1 est fini, que ω_3 est un infiniment petit du premier ordre, que ω_2 est un infiniment petit du second ordre; en effet, en négligeant les termes d'ordres x^{-3} , on trouve facilement

$$(21) \quad \begin{cases} \omega_2 \sim \frac{1}{\mu_r x^2} \left(s_2 - \frac{J_1^2}{J_1^1} s_1 \right), \\ \omega_3 \simeq \frac{1}{x} \left[\nu_2 + \frac{1}{\mu_r x} \left(s_3 - \frac{J_3^3}{J_1^1} s_1 \right) \right] + s_3, \\ \omega_1 = \frac{1}{J_1^1} (s_1 - J_1^2 \omega_2 - J_1^3 \omega_3). \end{cases}$$

Lorsque x devient infini, ω_2 et ω_3 tendent vers zéro, tandis que ω_1 tend vers une limite finie non nulle $\frac{s_1}{J_1^1}$. Donc si l'on adjoint à un système S_N un système infiniment éloigné S_K de barycentre G_s , le solide principal du système complété tourne par rapport au solide principal de S_N avec un vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ dirigé suivant la droite GG_s . Si le système S_K adjoint possède un moment cinétique suffisamment petit, alors le rapport $\frac{s_1}{J_1^1}$ peut devenir négligeable.

Si l'on considère maintenant le cas d'un système S_1 formé d'un seul point matériel M_{N+1} , ce point se confond avec G_s , le moment cinétique est nul, tous les s_i sont nuls; ω_1 et ω_3 sont alors des infiniment petits du premier ordre et ω_2 est un infiniment petit du troisième ordre. Si le point M_{N+1} s'éloigne indéfiniment, le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ tend vers zéro. Ainsi l'adjonction d'un point infiniment éloigné du système S_N constitue

un système S_{N+1} dont le solide principal ne tourne pas par rapport à celui de S_N ; ces deux solides sont seulement en translation l'un par rapport à l'autre, translation déterminée par la relation (17); cette propriété subsiste si l'on complète S_{N+1} par un point M_{N+2} infiniment éloigné de S_N et de M_{N+1} . Finalement on est donc conduit à ce théorème :

THÉORÈME. — *Si l'on complète un système S_N par un système S_K , le système complet a un solide principal défini par rapport à celui de S_N par les équations (17) et (19). Si le système S_K s'éloigne indéfiniment du système S_N , son tenseur d'inertie et son moment cinétique par rapport à son centre de gravité G_s demeurant finis, le vecteur rotation ω du solide principal du système complété par rapport au solide principal de S_N , tend à se trouver sur la droite GG_s joignant le centre de gravité de S_N à celui de S_K . La valeur de ω dans ce cas est donnée par les relations (21).*

CHAPITRE III

NOUVELLE FORME DES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

1. **Condition du maintien de la superposition des forces accélératrices.** — Avant de chercher à trouver une nouvelle forme pour les principes de la Mécanique et pour voir de quelle façon apparaîtra la notion de masse, nous examinerons comment se transforme l'expression des forces accélératrices quand on passe d'un trièdre principal relatif à un certain choix de masses à un autre trièdre principal relatif à un autre choix de masses. Nous supposerons n'avoir admis que les principes de la Cinématique classique et le principe des équations différentielles (postulats I à IV).

Faisons un choix de masses $\{m\}$ pour les différents points matériels, soit ceux de l'univers (qui sont énumérables en vertu du principe de l'atomisme), soit ceux d'un ensemble fini E comprenant les points matériels de la Terre et d'un ensemble suffisamment riche d'étoiles.

Rapportons le mouvement à un trièdre $T_p[m]$ qui est principal pour ce choix de masses et à une échelle de temps cinématique $[\tau]$. Supposons que par rapport à ce trièdre le principe de superposition des forces soit valable, c'est-à-dire que

$$\Phi_i = \sum_j \Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; \tau).$$

Choisissons maintenant d'autres valeurs pour les masses, soit $\{\mu\}$ et cherchons l'expression de la force accélératrice φ_i quand on rapporte le mouvement à un trièdre principal pour ce choix des masses, puis examinons quelles conditions doivent remplir les masses μ_i que nous supposons être des quantités constantes et positives, pour que le principe de superposition soit encore valable quand on rapporte le mouvement au trièdre $T_p[\mu]$.

En vertu du principe des équations différentielles, nous calculerons tout d'abord la relation qui existe entre l'accélération $\mathbf{\Gamma}_i$ d'un point

matériel M_i par rapport au trièdre $T_p[m]$ et l'accélération $\mathbf{\Gamma}_{r,i}$ de ce même point matériel par rapport au trièdre $T_p[\mu]$. Pour plus de simplicité, nous poserons

$$\mathbf{\Upsilon}_i = \mathbf{\Gamma}_{r,i} = \left[\frac{d^2 \vec{g} M_i}{dt^2} \right]_{/T[\mu]}.$$

Une relation de Cinématique bien connue dans la théorie des mouvements relatifs, nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_i = \left[\frac{d^2 \vec{G} M_i}{dt^2} \right]_{/T[m]} &= \left[\frac{d^2 \vec{G} g}{dt^2} \right]_{/T[m]} + \mathbf{\Upsilon}_i + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{r,i} + \boldsymbol{\omega} \wedge \vec{g} M_i \\ &+ (\boldsymbol{\omega} \cdot \vec{g} M_i) \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \cdot \vec{g} M_i. \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser la relation suivante :

$$\left[\frac{d^2 \vec{G} g}{dt^2} \right]_{/T[m]} = \frac{\sum_i \mu_i \mathbf{\Gamma}_i}{\sum_i \mu_i}.$$

De la relation précédente, nous tirons $\mathbf{\Upsilon}_i$ en fonction de $\mathbf{\Gamma}_i$ et des vitesses et positions de tous les points du système par rapport au trièdre $T_p[m]$:

$$(1) \quad \mathbf{\Upsilon}_i = \mathbf{\Gamma}_i - \sum_j \frac{\mu_j \mathbf{\Gamma}_j}{\mu} - 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{r,i} - \boldsymbol{\omega}' \wedge \vec{g} M_i - (\boldsymbol{\omega} \cdot \vec{g} M_i) \cdot \boldsymbol{\omega} + \omega^2 \cdot \vec{g} M_i,$$

en posant

$$\mu = \sum_j \mu_j,$$

pour j variant de 1 à N; autrement dit, μ est la masse totale du système de points matériels étudié dans le deuxième choix des masses.

$\boldsymbol{\omega}$ s'exprime en fonction des positions des points M_i et des vitesses $\mathbf{v}_i$ par rapport au trièdre $T_p[m]$; en dérivant son expression, on obtient $\boldsymbol{\omega}'$ en fonction des positions des points M_i , des vitesses $\mathbf{v}_i$ et des accélérations $\mathbf{\Gamma}_i$ par rapport au trièdre $T_p[m]$. Les $\mathbf{\Gamma}_i$ doivent être remplacés par les fonctions Φ_i des positions et des vitesses. Il faut alors remplacer dans toutes ces quantités les vitesses $\mathbf{v}_i$ par leur expression en fonction de $\mathbf{v}_{r,i}$. De cette façon on obtient les $\mathbf{\Upsilon}_i$ comme égaux à une fonction φ_i des positions et vitesses par rapport au trièdre $T_p[\mu]$. On constate que cette fonction φ_i ne peut pas être écrite sous forme d'une somme de

fonctions φ_{ij} ne dépendant que des points M_i et M_j et de leurs vitesses relatives au trièdre $T_p[\mu]$. Ainsi, si l'on a superposition des forces accélératrices pour un choix de masses $[m]$ quand on rapporte le mouvement à un trièdre principal $T_p[m]$, cette superposition ne se maintient pas quand on fait un autre choix de masses. Par conséquent on peut introduire la notion de masse au moyen du principe de superposition des forces joint au principe du repère fondamental.

En effet s'il y avait superposition des forces accélératrices quand on rapporte le mouvement au trièdre $T_p[\mu]$, on aurait

$$(2) \quad \gamma_i = \varphi_i = \sum_j \varphi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t).$$

Or, on ne peut obtenir une telle forme pour φ_i . Pour l'établir, remplaçons dans la formule (1) les quantités Γ_i , ω , ω' , par les expressions suivantes tirées d'une part de l'équation fondamentale $\Gamma_i = \Phi_i$ et d'autre part des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \Phi_i = \sum_j \Phi_{ji}, \\ \omega' &= \vec{\dot{U}} \cdot \vec{\pi}, \\ \omega &= \left[\frac{d\vec{\dot{U}}}{dt} \right]_{/T_p[m]} \cdot \vec{\pi} + \vec{\dot{U}} \cdot \left[\frac{d\vec{\pi}}{dt} \right]_{/T_p[m]}, \end{aligned}$$

où $\vec{\pi}$ est le vecteur défini au chapitre précédent (p. 24).

L'expression de φ_i devient ainsi

$$\begin{aligned} (3) \quad \varphi_i &= \sum_j \Phi_{ji} - \sum_{jk} \frac{\mu_j}{\mu} \Phi_{kj} - 2 \left(\vec{\dot{U}} \cdot \vec{\pi} \right) \cdot \mathbf{v}_{r,i} \\ &\quad - \left\{ \left[\frac{d\vec{\dot{U}}}{dt} \right]_{/T_p[m]} \cdot \vec{\pi} + \vec{\dot{U}} \cdot \left[\frac{d\vec{\pi}}{dt} \right]_{/T_p[m]} \right\} \wedge \overrightarrow{gM_i} \\ &\quad - \left(\left[\vec{\dot{U}} \cdot \vec{\pi} \right] \cdot \overrightarrow{gM_i} \right) \cdot \left[\vec{\dot{U}} \cdot \vec{\pi} \right] + \left(\vec{\dot{U}} \cdot \vec{\pi} \right)^2 \cdot \overrightarrow{gM_i}. \end{aligned}$$

Il est impossible en général de mettre cette expression de φ_i sous la forme d'une somme de termes φ_{ij} , car non seulement elle contient des termes en i, j , soit

$$\varphi_{ij} = \Phi_{ij} - \frac{\mu_j}{\mu} \Phi_{ij} - \frac{\mu_i}{\mu} \Phi_{ji},$$

mais aussi des termes contenant deux points autres que i , soit

$$\varphi_{ijk} = -\frac{\mu_k}{\mu_i} \Phi_{jk} - \frac{\mu_j}{\mu_i} \Phi_{ki}$$

et des termes contenant tous les points du système : les termes dépendant de ω , soit

$$\begin{aligned} \varphi_{i,(n)} = & -2 \vec{\dot{U}} \cdot \vec{\dot{\pi}} \wedge \mathbf{v}_{r,i} - \left[\frac{d\vec{\dot{U}} \cdot \vec{\dot{\pi}}}{dt} \right]_{/T_p[m]} + \vec{\dot{U}} \cdot \left[\frac{d\vec{\dot{\pi}}}{dt} \right]_{/T_p[m]} \wedge \vec{g} \vec{M}_i \\ & - \left(\left[\vec{\dot{U}} \cdot \vec{\dot{\pi}} \right] \cdot \vec{g} \vec{M}_i \right) \cdot \left(\vec{\dot{U}} \cdot \vec{\dot{\pi}} \right) + \left(\vec{\dot{U}} \cdot \vec{\dot{\pi}} \right)^2 \cdot \vec{g} \vec{M}_i. \end{aligned}$$

Les termes φ_{ijk} et $\varphi_{i,(n)}$ ne peuvent s'annuler tous si les μ_i sont différents des m_i (autre qu'un changement d'unité).

Si l'on effectue un changement d'échelle de temps

$$\tau = f(t), \quad t = g(\tau)$$

dans les équations du mouvement

$$\Upsilon_i = \varphi_i(M_1, \dots, M_n; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n; t) \quad (i = 1, \dots, n),$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= f'(t) = \frac{1}{g'(\tau)}, \\ \frac{d^2\tau}{dt^2} &= f''(t) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{g'(\tau)} \right) \frac{d\tau}{dt} = -\frac{g''}{g'^3}; \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}_{\tau,i}}{g'(\tau)}; \quad \Upsilon_i = \frac{\Upsilon_{\tau,i}}{g'^2} + \mathbf{v}_{\tau,i} \frac{g''}{g'^3}$$

et les nouvelles équations du mouvement

$$\Upsilon_{\tau,i} = g'^2(\tau) \varphi_i \left(M_1, \dots, M_n; \frac{\mathbf{v}_{\tau,i}}{g'(\tau)}; g(\tau) \right) + \mathbf{v}_{\tau,i} \frac{g''(\tau)}{g'(\tau)}.$$

Ce changement ne peut évidemment pas rétablir la superposition. Remarquons aussi que si l'on a des fonctions φ_i quelconques ne satisfaisant pas à la condition de superposition, il n'existera pas en général de repère $T_p[m]$ tel que par rapport à ce repère il y ait superposition des forces accélératrices Φ_{ij} , ceci ne peut avoir lieu que si les φ_i sont de la forme (3).

Nous arrivons donc à ce théorème :

THÉOREME 1. — *a. Si partant d'un trièdre principal $T_p[m]$ pour un choix $\{m_i\}$ des masses pour lequel il y a superposition des forces*

accélératrices, on rapporte le mouvement d'un système S à un trièdre principal $T_p[\mu]$ pour un autre choix $\{\mu_i\}$ des masses (différent d'un changement d'unité), même si l'on effectue en outre un changement d'échelle de temps, il n'y a plus superposition :

$$\Phi_i \neq \sum_j \Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_{i,i}, \mathbf{v}_{i,j}; t).$$

b. Si l'on donne des forces accélératrices quelconques, il n'existe pas en général de trièdre principal $T_p[m]$ tel que par rapport à ce repère on ait superposition des forces accélératrices.

Ceci nous conduit à une nouvelle forme des principes de la Mécanique classique.

2. Le principe de superposition des forces. — Le théorème du paragraphe précédent conduit à représenter les principes de la Mécanique classique sous une autre forme que celle résumée au chapitre I. On peut adopter soit une forme positiviste, soit une forme cosmologique. Dans cette façon de voir, le principe des équations différentielles étant admis, le premier principe à énoncer est celui concernant la superposition des accélérations, nous lui donnerons l'une des deux formes suivantes :

POSTULAT Vb : PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES FORCES ACCÉLÉRATRICES SOUS FORME POSITIVISTE. — *Ayant fixé un ensemble E de points matériels (ensemble fini en vertu du principe de l'atomisme) comprenant tous les points directement accessibles à l'expérience et ceux d'un ensemble d'étoiles observables suffisamment riche pour qu'on n'ait pas à considérer de points matériels autres que ceux de E, il existe un ensemble $\{m_i\}$ de coefficients positifs constants (dits « masses d'inertie relativement à E ») qu'on associe à chacun des points matériels M_i de l'ensemble E tel que si l'on adopte comme repère un trièdre principal pour l'ensemble des points M_i de E affectés des masses m_i , la force accélératrice Φ_i à laquelle est soumis le $i^{\text{ème}}$ point M_i est une somme de fonctions Φ_{ji} ne dépendant que des positions et vitesses des points M_j et M_i et du temps τ soit*

$$\Phi_i = \sum_j \Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; \tau) \quad (\text{avec } \Phi_{ii} = 0).$$

L'expression d'une fonction Φ_{ji} est indépendante des autres points

matériels et du système S dans lequel la paire M_i, M_j de points matériels peut entrer.

POSTULAT Vb' : PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES FORCES ACCÉLÉRATRICES SOUS FORME COSMOLOGIQUE. — *Il existe un ensemble m_i de coefficients positifs constants (dits « masses d'inerties ») qu'on associe à chacun des points matériels de l'univers tel que si l'on adopte comme repère un trièdre principal pour l'ensemble des points M_i de l'univers (ensemble fini ou infini dénombrable en vertu du principe de l'atomisme), la force accélératrice Φ_i à laquelle est soumis le point M_i est une somme de fonctions Φ_{ji} ne dépendant que des positions et vitesses des points M_j et M_i par rapport au repère adopté et du temps, soit*

$$\Phi_i = \sum_j \Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; \tau).$$

L'expression d'une fonction Φ_{ji} est indépendante des autres points matériels et du système S dans lequel la paire M_i, M_j de points matériels peut entrer.

3. Remarques sur la notion de masse. — Ce principe appelle quelques remarques. Tout d'abord d'après le principe de l'atomisme, chaque système S observable est représenté par un ensemble fini de points, mais ceci ne s'étend pas nécessairement à la totalité de l'univers. De plus il n'est pas évident qu'on puisse considérer l'univers comme un système observable, car ceci n'a pas lieu en Mécanique ondulatoire. Le principe de l'atomisme précise encore que tout domaine de mesure finie de l'espace physique ($\mathbf{R}_3$) ne contient qu'un nombre fini de points matériels; mais si l'univers s'étend indéfiniment (ce qui est possible du fait que l'espace physique est supposé euclidien, donc indéfini), il peut être constitué soit par un ensemble fini de points matériels, soit par un ensemble infini dénombrable. Dans une théorie classique et non relativiste, ces deux possibilités doivent être laissées ouvertes : l'énoncé précédent (postulat Vb') satisfait à cette condition.

D'autre part on voit que le postulat Vb (ou Vb') réunit en un seul le principe de la masse (postulat $VIIa$), le principe de superposition (postulat $VIIIa$), le principe du repère fondamental (postulat Xa ou Xa'), et évite toute surabondance introduite par le principe du repère fondamental. Mais les notions de masse et de force accélératrice Φ_{ji} changent de signification. Dans l'exposé habituel, la masse

d'un point matériel semble être une propriété intrinsèque de ce point ⁽¹⁾; ici au contraire la notion de masse apparaît comme liée à la totalité de l'univers; la masse exprime une solidarité des points matériels entre eux qui se traduit par l'existence de la propriété particulière que constitue la superposition des forces accélératrices pour le trièdre principal lié à ce choix de masses. Or, Mach en exposant les principes de la Mécanique sous forme aussi positiviste qu'il le pouvait, introduisait la masse par l'égalité de l'action et de la réaction, ce qui conduisait au principe de la masse (postulat VIIIa, p. 10); il faisait apparaître ainsi la masse comme une propriété intrinsèque du point matériel (se trouvant là en accord avec les réalistes), mais sa méthode n'est pas du tout positiviste puisqu'il suppose que les points matériels sont envoyés par paires à l'infini, et qu'on peut alors mesurer leurs accélérations, ce qui est irréalisable. C'est pour éviter à la fois l'ancienne manière réaliste conduisant à introduire la masse comme un concept et la méthode positiviste de Mach que j'ai envisagé cette nouvelle manière de considérer les principes.

Mais dans un autre écrit, Mach a explicitement indiqué (et il a été le premier à le faire), qu'il fallait considérer la masse d'un point matériel, non pas comme une propriété intrinsèque de ce point, mais comme exprimant la connexion de ce point avec le reste de l'univers; selon Mach, la masse traduit l'influence des corps très éloignés. Il n'a cependant pas su aller au-delà de cette idée et la traduire en équations ⁽²⁾. Einstein a profondément réfléchi sur cette conception de Mach lorsqu'il cherchait à construire la théorie de la relativité généralisée et l'a utilisée pour identifier la masse gravitationnelle à la masse d'inertie et géométriser la théorie de la gravitation. Le principe précédent (postulat Vb ou Vb') me paraît l'expression formelle de cette idée de Mach. En effet, les corps très éloignés jouent un rôle essentiel dans la définition du trièdre principal fondamental. Ce sont les masses attribuées aux divers points matériels qui fixent ce trièdre principal et c'est par rapport à ce trièdre qu'on a la propriété de superposition qui ne peut avoir lieu pour d'autres choix de masses. Ainsi nous avons bien introduit la notion de masse comme une propriété traduisant la solidarité de chaque point matériel avec l'ensemble de tous les points matériels ou encore avec l'univers.

(1) Voir J.-L. DESTOUCHES, *Les principes de la Mécanique classique* (C. N. R. S., Paris, 1948), p. 46-48, comment est introduit la masse d'un point matériel à partir du principe de la masse par la méthode dérivée de Mach.

(2) Il lui manquait le théorème du solide principal pour y réussir.

4. **Remarques sur la notion de force accélératrice.** — Il faut remarquer aussi que les fonctions Φ_{ji} n'ont pas, dans le principe précédent, la même signification que dans l'exposé usuel. En effet dans cet exposé on commence par prendre une paire de points matériels M_i, M_j infiniment éloignés des autres; ces points prennent des accélérations Γ_{ji} et Γ_{ij} (égales à des forces accélératrices Φ_{ji} et Φ_{ij} en vertu du principe des équations différentielles); celles-ci sont liées par le principe de l'action et de la réaction (postulat VIa, p. 9). Ensuite quand on considère un système S contenant plusieurs points matériels, en vertu du principe de superposition (postulat VIIIa, p. 10) l'accélération Γ_i du point M_i est égale à la somme $\sum_j \Phi_{ji}$ des fonctions Φ_{ji} pour tous les points j du système. On définit donc la fonction Φ_{ji} par la force accélératrice qu'aurait le point M_i s'il se trouvait en la présence du seul point M_j , tous les autres points matériels étant infiniment éloignés de ce couple.

Au contraire dans le principe énoncé ici (postulat Vb ou Vb') la fonction Φ_{ji} est définie comme le terme dépendant de M_j dans l'expression de l'accélération de M_i quand tous les points du système sont présents, car puisque nous nous interdisons tout envoi à l'infini, nous ne pouvons pas définir Φ_{ji} comme dans la méthode habituelle, et c'est bien quand tous les points effectivement présents sont pris en considération que des mesures sont possibles. Mais alors Φ_{ji} apparaît comme relatif au système S considéré : dans chaque cas où le système de points matériels contient M_i et M_j , la force accélératrice Φ_i pour M_i contiendra un terme Φ_{ij} ayant pour arguments $M_i, M_j, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \tau$, mais il pourrait se faire que cette fonction Φ_{ij} varie quand on change d'environnement ou de système, c'est-à-dire que la forme de cette fonction (qui elle ne dépend que des arguments indiqués), soit relative au système considéré. Φ_i se décomposerait donc toujours en une somme de termes n'ayant chacun que les arguments d'une paire de points, mais la forme des termes pourrait dépendre du système considéré. Ceci signifierait (pour prendre une expression que nous utiliserons surtout dans la troisième partie) que l'extérieur influence le système dans ses caractéristiques propres. Or, une telle hypothèse est exclue aussi bien en Mécanique classique qu'en Mécanique ondulatoire usuelle. Au contraire en théorie fonctionnelle des corpuscules, nous considérerons de telles influences (cf. 3^e partie). Selon l'esprit classique, il faut donc exclure cette hypothèse, et c'est ce qu'exprime la dernière partie du postulat Vb (ou Vb').

Une autre façon de s'exprimer, valable surtout du point de vue cosmologique, est la suivante : l'univers forme un tout où les points matériels interagissent. Les fonctions Φ_{ij} peuvent avoir des valeurs très différentes les unes des autres, mais les formes de ces fonctions sont fixes et il n'y a qu'une fonction Φ_{ij} pour i et j donnés, même si M_i , M_j se trouvent au milieu de tous les autres points (l'ensemble des points matériels a été supposé énumérable). La notion de système physique est une abstraction construite en remplaçant par zéro certains termes Φ_{ij} qui ont des valeurs petites dans l'intervalle de temps considéré, d'où l'existence d'un système S formé par l'ensemble des points M_i , M_j pour lesquels les valeurs des indices i ou j figurent dans les indices des Φ_{kl} conservés. Cette interprétation est la plus naturelle en Mécanique classique, mais elle ne conviendra pas en Mécanique ondulatoire usuelle où la notion de « système physique observable » joue un rôle essentiel. Si on l'adopte, il faut supprimer la dernière phrase du postulat Vb (ou Vb') qui alors perd tout son sens.

En Mécanique classique, la notion de « système physique » n'a pas un sens univoque précis : on peut lui donner la signification que nous venons d'indiquer, ou au contraire la signification qu'elle a en Mécanique ondulatoire usuelle, celle d'un découpage effectué dans l'univers par l'observateur et sur lequel il se livre à des observations. Et c'est bien ce sens qu'a la notion de système physique dans le principe des équations différentielles. Mais le découpage n'est possible et n'est doué de signification que si la partie découpée se maintient d'une façon autonome, c'est-à-dire si l'on a bien un système au sens envisagé ci-dessus. En somme, la notion de système physique en Mécanique classique oscille entre deux significations et un « système » n'est bien défini que s'il est un système dans les deux significations à la fois.

Après ces digressions revenons à notre exposé des principes de la Mécanique.

§. **Caractère cinématique du principe de superposition.** — On appelle « propriété cinématique », une propriété qui subsiste lors d'un changement quelconque d'échelle de temps cinématique. Le principe des équations différentielles possède ce caractère cinématique (voir p. 6); vérifions maintenant que le principe de superposition des forces accélératrices possède aussi le caractère cinématique. Tout d'abord, on sait qu'un repère principal est indépendant de l'échelle de temps choisie (voir p. 14); donc le repère fondamental $T_p[m]$ demeure le même lors d'un changement de l'échelle de temps. Effectuons le changement de

$[\tau]$ en $[\tau^*]$, soit

$$(4) \quad \tau^* = f(\tau), \quad \tau = g(\tau^*),$$

alors

$$(5) \quad \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{M}_i}{d\tau} = \frac{\mathbf{v}_i^*}{g'(\tau^*)}; \quad \Upsilon_i^* = g'^2 \Upsilon_i + \mathbf{v}_i^* \frac{g''}{g'}.$$

Posons alors

$$(6) \quad \Phi_i = g'^2 \Phi_i + \mathbf{v}_i^* \frac{g''}{g'}.$$

pour conserver la relation fixée par le principe des équations différentielles.

Posons de même

$$(7) \quad \begin{aligned} & \Phi_{ji}(\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; \tau^*) \\ &= g'^2 \Phi_{ji} \left(\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j; \frac{\mathbf{v}_i^*}{g'(\tau)}, \frac{\mathbf{v}_j^*}{g'(\tau)}; g(\tau^*) \right) + \frac{1}{N} \frac{g''}{g'} \mathbf{v}_i^*. \end{aligned}$$

On voit donc que notre principe de superposition permet de mettre sous forme cinématique des notions qui dans l'exposé usuel des principes de la Dynamique paraissent liées au choix des échelles de temps privilégiées $[t]$. Or, il est évident que l'inertie demeure quelle que soit l'échelle de temps adoptée; tout ce qui est lié à la masse doit donc pouvoir s'exprimer avec une échelle de temps cinématique quelconque $[\tau]$. On a avantage à ne faire dépendre des échelles de temps privilégiées que les notions qui en dépendent essentiellement, et à mettre sous forme cinématique les notions du type de la masse, comme nous l'avons fait pour le principe des équations différentielles. C'est ce que permet le postulat Vb (ou Vb').

6. Le principe de l'action et de la réaction. — Jusqu'à maintenant, nous avons admis le principe de superposition mais nous n'avons imposé aucune relation entre Φ_{ij} et Φ_{ji} , c'est-à-dire que nous n'avons introduit aucune relation du genre de l'égalité de l'action et de la réaction.

Remarquons tout d'abord que sous la forme développée ici, nous pourrions introduire une relation entre Φ_{ij} et Φ_{ji} sans avoir besoin de supposer que les points $\mathbf{M}_i$ et $\mathbf{M}_j$ sont infiniment éloignés des autres points, condition contraire aux possibilités expérimentales, cela en vertu du fait que nous avons introduit le principe de superposition en premier lieu. Remarquons ensuite que si l'on admet le principe de l'action et de la réaction pour une certaine échelle de temps $[t]$, cette

égalité ne subsiste pas pour une autre échelle de temps cinématique $[\tau]$.
En effet posons

$$m_i \Phi_{ji} + m_j \Phi_{ij} = 0 \quad (\text{pour l'échelle } [t]).$$

D'après les formules de changement d'échelle de temps,

$$\tau = f(t), \quad t = g(\tau),$$

$$\mathbf{v}_{\tau,i} = \mathbf{v}_i \cdot g'(\tau),$$

$$\Upsilon_i = \Gamma_i \cdot g'^2 + \mathbf{v}_i \cdot g'',$$

on a, d'après les principes des équations différentielles et de superposition,

$$\varphi_i = \sum_j \varphi_{ji} = \Upsilon_i = \sum_j \Phi_{ji} \cdot g'^2 + \mathbf{v}_i \cdot g''.$$

En vertu de ce qui a été posé précédemment, on aura donc

$$\varphi_{ji} = g'^2 \cdot \Phi_{ji} + g'' \cdot \eta_{ji} \cdot \mathbf{v}_i,$$

où η_{ji} est un coefficient tel que $\sum_j \eta_{ji} = 1$ et qui est déterminé par le choix des Φ_{ji} comme il a été indiqué plus haut.

De là on tire

$$(8) \quad m_i \varphi_{ji} + m_j \varphi_{ij} = g'^2 (m_i \Phi_{ij} + m_j \Phi_{ji}) + g'' (\eta_{ji} m_i \mathbf{v}_i + \eta_{ij} m_j \mathbf{v}_j).$$

Si l'on suppose la première parenthèse nulle, il n'en résulte pas en général que le premier membre soit nul; en effet, les vitesses $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{v}_j$ dépendent des conditions initiales et de toutes les fonctions Φ_{kl} ; en général elles sont quelconques et l'on a seulement $m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j = \text{Cte.}$ La seconde parenthèse ne s'annule qu'exceptionnellement. Ainsi si l'on suppose qu'il y a égalité de l'action et de la réaction pour une certaine échelle de temps $[t]$, cette propriété ne subsiste pas lors d'un changement quelconque d'échelle de temps, d'où :

THÉOREME 2. — *Si l'on suppose qu'entre deux points M_i, M_j dont le mouvement est rapporté au trièdre fondamental T_0 , il y a, pour une échelle de temps $[t]$ égalité de l'action et de la réaction, cette égalité ne subsiste pas lors d'un changement quelconque d'échelle de temps. Une telle propriété n'a donc pas le caractère cinématique; si l'on suppose qu'elle a lieu pour une échelle de temps $[t]$ elle vient priver certaines échelles de temps.*

Soit $[t]$ une échelle pour laquelle il y a égalité de l'action et de la réaction; cherchons à déterminer quelles sont les autres échelles de temps pour lesquelles cette propriété subsistera. Tout d'abord si $g'' = 0$ on voit que la propriété subsiste; c'est donc le cas lorsque le changement d'échelle de temps se limite à un changement d'origine et un changement d'unité.

Si $g'' \neq 0$, la seconde parenthèse de la relation (8) ne s'annulera qu'exceptionnellement; même si toutes les parenthèses contenant des fonctions Φ_{li} et Φ_{lj} étaient nulles, de $m_i \Phi_{ji} + m_j \Phi_{ij} = 0$ on tirerait $m_i \mathbf{r}_i + m_j \mathbf{r}_j = 0$, d'où en intégrant : $m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j = \mathbf{a}$; par suite même en faisant $\eta_{ij} = \eta_{ji}$, on aurait

$$m_i \mathbf{v}_{ji} + m_j \mathbf{v}_{ij} = g'' \eta_{ij} \mathbf{a};$$

or, le vecteur $\mathbf{a}$ n'est nul que si l'on fixe initialement que le barycentre G_{ij} de M_i et M_j a une vitesse nulle; or, c'est là un cas exceptionnel. Donc pour que l'égalité de l'action et de la réaction se conserve quelles que soient les conditions initiales, il est nécessaire que $g'' = 0$, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de se limiter aux changements d'échelle de temps envisagés ci-dessus. On peut ainsi prendre le principe de l'égalité de l'action et de la réaction pour fixer les échelles de temps privilégiées en Dynamique, au lieu de les fixer par le principe de l'inertie comme on le fait d'habitude; les échelles de temps privilégiées peuvent s'introduire au choix par l'un ou l'autre de ces deux principes. Nous allons donner les deux exposés. Pour mieux mettre en évidence cette propriété de l'égalité de l'action et de la réaction, c'est au moyen du principe de l'égalité de l'action et de la réaction que nous introduirons tout d'abord les échelles de temps privilégiées.

Dans l'égalité de l'action et de la réaction il y a plus que l'égalité vectorielle $m_i \Phi_{ji} + m_j \Phi_{ij} = 0$, on admet encore en Mécanique newtonienne qu'il y a égalité pour les moments, soit

$$(9) \quad m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \Phi_{ji} + m_j \overrightarrow{OM_j} \wedge \Phi_{ij} = 0.$$

Si l'on tient compte de la relation précédente, celle-ci se transforme en

$$\overrightarrow{M_i M_j} \wedge \Phi_{ij} = 0;$$

ceci n'a lieu que si l'un des deux facteurs est nul ou si les deux vecteurs sont colinéaires; on aura donc

$$(10) \quad m_j \Phi_{ij} = \lambda_{ij} \overrightarrow{M_i M_j}, \quad m_i \Phi_{ji} = \lambda_{ji} \overrightarrow{M_j M_i}$$

avec dans le cas exceptionnel où M_i et M_j sont confondus, la possibilité de laisser Φ_{ji} et Φ_{ij} quelconques, mais on écarte cette possibilité en imposant que la direction du vecteur Φ_{ij} varie d'une façon continue. L'égalité de l'action et de la réaction s'exprime donc par la condition que les deux vecteurs $m_i \Phi_{ji}$ et $m_j \Phi_{ij}$ forment un système de vecteurs équivalent à zéro : ceci entraîne

$$\lambda_{ji} = \lambda_{ij}$$

où λ_{ij} sera une fonction de M_i , M_j , $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$, t en vertu du principe de superposition des forces. On peut donc donner au principe de l'égalité de l'action et de la réaction, soit une forme conduisant à admettre la relation (9), soit une forme conduisant à admettre la relation (10). Nous l'énoncerons sous la première de ces deux formes :

POSTULAT VI b : PRINCIPE DE L'ÉGALITÉ DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION. — *a. Les mouvements étant rapportés au repère fondamental T_0 il existe une échelle de temps $[t]$ telle que pour chaque paire $M_i M_j$ de points matériels, la paire de vecteurs $m_i \Phi_{ji}$, $m_j \Phi_{ij}$ constitue un système de vecteurs équivalent à zéro, c'est-à-dire qu'on a*

$$m_i \Phi_{ji} + m_j \Phi_{ij} = 0, \quad m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \Phi_{ji} + m_j \overrightarrow{OM_j} \wedge \Phi_{ij} = 0,$$

relations qui peuvent encore s'écrire

$$\{ m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij} \} \simeq 0.$$

b. En outre, on a pour cette échelle de temps privilégiée $[t]$

$$\Phi_{ji} = \mathbf{v}_{ji} \left(r_{ij}, \frac{dr_{ij}}{dt}, t \right) \overrightarrow{M_j M_i}.$$

Cette partie *b* du principe précédent doit être supprimée (au point de vue formel) si l'on se limite à la forme classique du principe de l'action et de la réaction dans l'exposé habituel des principes (voir chap. I, p. 9, postulat VI *a*, parties *a* et *b* seulement, partie *c* exclue). Au contraire, si l'on considère dans l'exposé habituel (*a*) le principe de l'action et de la réaction complété par la partie *c* exprimant le contenu du principe d'objectivité matérielle de Walter Noll ⁽¹⁾ pour le cas de la Mécanique des systèmes de points matériels, il convient d'admettre aussi la partie *b* du principe précédent. Dans ce cas, la seconde équation

(1) Walter NOLL, Communication Colloque Berkeley, 1958; Communication Colloque Paris, 1959.

de la partie a est superflue et doit être supprimée, car elle résulte immédiatement de la première équation et de l'équation de la partie b .

Au point de vue physique, les forces accélératrices satisfont à la condition b précédente, et l'on doit donc l'accepter parmi les principes de la Mécanique, d'où les deux parties a , b , du postulat VI b .

Cependant, il serait préférable d'admettre le principe d'objectivité matérielle sous la forme générale suivante correspondant à l'idée d'objectivité introduite par Walter Noll, et la partie b du principe précédent en apparaîtrait comme une conséquence, soit :

PRINCIPE D'OBJECTIVITÉ MATÉRIELLE. — *Le temps étant repéré suivant une échelle de temps privilégiée $[t]$, quel que soit le repère T auquel on rapporte le mouvement du système S étudié, la fonction Φ_{ij} a même forme fonctionnelle.*

Alors de ce principe on dérive aisément la partie b du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Mais pour que cet énoncé prenne sa pleine signification, il faut examiner comment se présentent les équations du mouvement quand on rapporte le mouvement du système S considéré à un repère quelconque T et non au repère fondamental T_0 ; dans ce cas, comme il est bien connu, à la fonction Φ_i viennent s'ajouter des termes correctifs dits *forces accélératrices d'inertie*; les fonctions Φ_{ji} apparaissent donc dans l'équation du mouvement par rapport au repère quelconque T et l'énoncé du principe d'objectivité prend alors tout son sens. On remarquera que ce principe d'objectivité n'est pas de caractère cinématique et n'est valable que pour des échelles de temps privilégiées $[t]$.

7. Principe de l'inertie. — Dans l'exposé habituel (résumé au chapitre I) le principe de l'inertie joue deux rôles : 1° il indique le comportement d'un point matériel infiniment éloigné des autres points matériels; 2° il fixe les échelles de temps privilégiées. Dans le présent exposé, c'est le principe de l'action et de la réaction qui fixe les échelles de temps privilégiées; il ne subsiste donc que le premier rôle.

Dans l'exposé habituel, on tire du principe de l'inertie une conséquence que nous ne pouvons plus en déduire maintenant : considérons une paire de points matériels M_i , M_j infiniment éloignés des autres points; leurs accélérations résultent alors de forces accélératrices Φ_{ji} et Φ_{ij} en vertu du principe de l'action et de la réaction sous forme usuelle. Si ces deux points s'écartent à leur tour indéfiniment l'un de

l'autre, les accélérations deviennent nulles et l'on en conclut

$$\begin{aligned} \lim_{|\overrightarrow{M_i M_j}| \rightarrow +\infty} \Phi_{ij}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) &= 0; \\ \lim_{|\overrightarrow{M_j M_i}| \rightarrow +\infty} \Phi_{ji}(M_j, M_i; \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i; t) &= 0. \end{aligned}$$

Dans notre exposé les Φ_{ki} sont définis par la propriété de superposition (postulat V b); ce ne sont pas les Φ_{ki} des points M_k, M_i infiniment éloignés des autres points, mais des points M_k, M_i au milieu de tous les autres. Évidemment la dernière partie du postulat V b, spécifie que les fonctions Φ_{ki} sont indépendantes des autres points matériels, qu'elles restent les mêmes si les points M_k et M_i se trouvent infiniment éloignés des autres points; mais ceci ne suffit pas. En effet si l'on admet le principe simple de l'inertie : mouvement rectiligne et uniforme pour un point matériel infiniment éloigné des autres points matériels, on en conclut bien $\Phi_i = 0$, mais si une paire est infiniment éloignée, on ne peut rien dire sur son comportement car le principe de l'égalité de l'action et de la réaction sous la forme envisagée ici (postulat VI b) ne concerne pas le cas d'une partie infiniment éloignée des autres contrairement au principe habituel; donc si un système se divise en deux parties dont l'une s'éloigne à l'infini, on ne peut pas déduire des principes admis jusqu'ici que les Φ_{ij} concernant deux points M_i et M_j appartenant l'un à l'une et l'autre à l'autre partie, sont nulles. Il faut donc renforcer le principe de l'inertie pour compenser l'affaiblissement des principes de superposition et d'égalité de l'action et de la réaction dû au fait qu'on s'est refusé à envoyer les points par paires à l'infini.

Dans ces conditions le principe de l'inertie doit venir affirmer que des éléments infiniment éloignés n'exercent que des actions infiniment petites, c'est-à-dire que si les points M_i et M_j sont infiniment éloignés l'un de l'autre la fonction Φ_{ij} est nulle (donc aussi Φ_{ji} en vertu de l'égalité de l'action et de la réaction). Nous sommes ainsi conduit à adopter le principe suivant :

POSTULAT VII b : PRINCIPE DE L'INERTIE PAR PAIRE. — *Les mouvements étant rapportés au repère fondamental T_0 et à une échelle de temps privilégiée $[t]$, si un point matériel M_i s'éloigne indéfiniment d'un point matériel M_j la fonction Φ_{ji} tend vers zéro,*

$$\lim_{|\overrightarrow{M_i M_j}| \rightarrow \infty} \Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) = 0,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\forall \varepsilon. \exists r. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow |\Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t)| < \varepsilon.$$

Dans le cas où l'ensemble **E** de points matériels qu'on considère est fini, ce postulat est suffisant, qu'on adopte une forme positiviste ou une forme cosmologique. Toutefois si l'on adopte la forme cosmologique et si l'on admet en outre que l'univers peut contenir une infinité de points matériels (ceci se justifie, bien que, dans tout domaine de volume fini il n'y ait qu'un nombre fini de points matériels, en vertu du principe de l'atomisme : car l'espace physique étant supposé euclidien, des points matériels peuvent se trouver dans des régions infiniment éloignées et l'on peut avoir au total une infinité dénombrable de points matériels), alors le postulat précédent est trop faible (une somme d'une infinité de termes infiniment petits n'étant pas en général infiniment petite) il faut le renforcer par le postulat suivant :

POSTULAT VIII *b* : PRINCIPE DE L'INERTIE GLOBAL. — *Les mouvements étant rapportés au repère fondamental T_0 et à une échelle de temps privilégiée $[t]$, si un point matériel M_i est infiniment éloigné de tous les autres points matériels, son accélération est infiniment petite. Par suite la fonction Φ_i est infiniment petite :*

$$\forall \varepsilon. \exists r. [\forall M_j. (|\overrightarrow{M_i M_j}| > r) \Rightarrow |\Phi_i| < \varepsilon].$$

Par contre, si cet énoncé global est une conséquence immédiate du principe par paire dans le cas d'un ensemble fini de points matériels dans l'ensemble **E** ou dans l'univers, il n'en est pas une dans le cas d'une infinité dénombrable de points matériels; ce principe est donc superflu si l'on ne fait pas cette dernière hypothèse.

On pourrait aussi énoncer le principe de l'inertie en ne faisant pas intervenir les fonctions Φ_{ij} mais seulement la fonction Φ_i , c'est-à-dire en n'acceptant que le principe global et en rejetant le principe par paire. L'énoncé global est une conséquence immédiate du principe par paire joint au principe de superposition quand n'intervient qu'un nombre fini de points matériels, mais cet énoncé global est plus faible que le postulat VII *b* (principe par paire), car il ne permet pas d'affirmer que chaque terme Φ_{ji} tendra séparément vers zéro puisque nous nous refusons ici à envoyer les points par paires à l'infini selon la méthode de Mach. Nous aurions alors un système de postulats plus faible que celui de la Mécanique classique usuelle, et des commentaires des pages précédentes il résulte que nous ne pourrions rien affirmer concernant une partie de système infiniment éloignée d'une autre partie; nous ne pourrions pas annuler certains termes Φ_{ij} . Or, c'est là un fait physique

essentiel dont toute théorie doit tenir compte. Un tel système faible de postulats ne serait donc pas adéquat.

8. Introduction des échelles de temps privilégiées par le principe de l'inertie. — On peut aussi, comme dans l'exposé habituel, introduire les échelles de temps privilégiées par le principe de l'inertie. Pour cela il suffit de reprendre l'énoncé habituel (*voir* p. 8) où nous omettons pour abrégé les énoncés précis mis entre parenthèses :

POSTULAT VIc : PRINCIPE DE L'INERTIE. — *Les mouvements étant rapportés au repère fondamental T_0 :*

a. Tout point matériel M situé infiniment loin de tout autre point matériel a relativement à ce repère T_0 un mouvement infiniment voisin d'un mouvement rectiligne.

b. Si sur la droite D trajectoire de ce point, on fixe une origine et une orientation, l'abscisse $x(\tau)$ de la projection de M sur D est une fonction toujours croissante ou toujours décroissante de τ .

c. Si l'on adopte une échelle de temps $[t]$ telle que la vitesse du point M soit constante, alors tout point matériel M' infiniment éloigné de tout autre point matériel a un mouvement infiniment voisin d'un mouvement uniforme.

Nous avons le principe de l'inertie habituel. Alors le principe de l'action et de la réaction prend la forme suivante :

POSTULAT VIIc : PRINCIPE DE L'ÉGALITÉ DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION. — *Les mouvements étant rapportés au repère fondamental T_0 et à une échelle de temps $[t]$ privilégiée, les fonctions Φ_{ji} et Φ_{ij} qui concernent deux points M_i et M_j sont telles que les vecteurs forces*

$$\mathbf{F}_{ji} = m_i \Phi_{ji}, \quad \mathbf{F}_{ij} = m_j \Phi_{ij}$$

constituent un système de vecteurs équivalent à zéro.

b. Les fonctions Φ_{ji} et Φ_{ij} sont telles que

$$\Phi_{ji} = \varphi_{ji} \left(r_{ij}, \frac{dr_{ij}}{dt}, t \right) \overrightarrow{M_i M_j},$$

$$\Phi_{ij} = \varphi_{ij} \left(r_{ij}, \frac{dr_{ij}}{dt}, t \right) \overrightarrow{M_i M_j}.$$

avec $r_{ij} = \left| \overrightarrow{M_i M_j} \right|$.

Si l'on admet les principes de la Mécanique avec le contenu classique,

la partie *b* de ce principe est à rejeter. Si l'on admet la forme renforcée par le principe d'objectivité matérielle de Walter Noll, on doit accepter la partie *b* du principe de l'action et de la réaction (postulat VII *c*) ou bien accepter le principe d'objectivité matérielle énoncé page 43, ce principe ayant pour conséquence la partie *b* du postulat VII *c*.

La seule différence entre ce postulat et le postulat habituel est la suivante : on ne suppose pas la paire M_i, M_j infiniment éloignée de tout autre point matériel, et l'on a déjà admis le principe de superposition. Cette différence affaiblit le principe ; comme dans la forme (*b*) et pour la même raison, il faut encore admettre une propriété supplémentaire sur les fonctions Φ_{ji} . En effet le principe de l'inertie VI *c* a pour conséquence que

$$\sum_j \Phi_{ji} = 0.$$

Mais il ne permet pas d'affirmer que chaque terme Φ_{ji} de la somme tend séparément vers zéro ; pour avoir cette propriété, il faut admettre encore :

POSTULAT VIII *c* : PRINCIPE DE L'INERTIE RENFORCÉ. — *Les mouvements étant rapportés au repère fondamental T_0 et à une échelle de temps privilégiée $[t]$, si un point matériel M_i s'éloigne indéfiniment d'un point M_j , alors la fonction Φ_{ji} tend vers zéro.*

On voit donc ainsi que la forme (*c*) des principes de la Mécanique est plus compliquée : elle regroupe en un seul principe, admis d'abord, les trois principes de superposition, de la masse et du repère fondamental de l'énoncé habituel (*a*), mais elle donne au principe de l'inertie son maximum de complexité, celui-ci ayant quatre parties : trois parties (*a*), (*b*), (*c*) en VI *c* et une en VIII *c* qui ne sont d'ailleurs pas complètement indépendantes.

La forme (*b*) des principes de la Mécanique est donc plus courte et elle réduit le principe de l'inertie à sa forme la plus simple, c'est pourquoi elle nous paraît préférable, ayant l'avantage de supprimer les inconvénients de la forme usuelle (*a*).

Il nous faut prouver maintenant l'équivalence de ces trois formes des principes de la Mécanique.

9. Équivalence des systèmes (*b*) et (*c*). — Pour montrer que les systèmes de postulats (*b*) et (*c*) sont équivalents, nous admettrons

d'abord (c) et montrerons qu'on peut en dériver (b) puis nous admettrons (b) et montrerons qu'on en dérive (c).

Nous admettons donc le système (c). Représentons par $\mathcal{N}(T_0, [t])$ l'expression « les mouvements étant rapportés au repère fondamental T_0 et à l'échelle de temps t ». Le postulat VII b s'exprime formellement par

$$\exists t. \quad \mathcal{N}(T_0, [t]) \rightarrow \{m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij}\} \simeq 0.$$

Or IV c définit une échelle de temps $[t_1]$ par

$$[t_1] =_d \left(\frac{dM}{dt_1} = \text{cte} \right),$$

où M est un point défini dans la première partie du postulat et VII c exprime qu'on a

$$\mathcal{N}(T_0, [t]) \rightarrow \{m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij}\} \simeq 0.$$

On a défini une échelle de temps $[t_1]$ qui réalise VI b, donc

$$(11) \quad (VI c) \ \& \ (VII c) \rightarrow (VI b).$$

Les postulats VIII c (principe de l'inertie renforcé) et VII b (principe de l'inertie par paire) sont d'expression formelle identique

$$\mathcal{N}(T_0, [t]) \rightarrow [\forall \varepsilon. \exists r. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow |\Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t)| < \varepsilon],$$

mais l'échelle de temps $[t]$ n'est pas définie de la même façon dans les deux cas : par VI b (égalité de l'action et de la réaction) dans le système (b), par VI c (inertie) dans le cas (c). Si les deux définitions de l'échelle de temps sont équivalentes, les postulats seront équivalents; on peut donc écrire en désignant par $\{[t]\}_b$ la classe des échelles privilégiées au sens (b) et par $\{[t]\}_c$ la classe des échelles privilégiées au sens (c) :

$$(12) \quad (\{[t]\}_b = \{[t]\}_c) \rightarrow ((VIII c) \leftrightarrow (VII b)).$$

On est ainsi ramené à prouver l'équivalence des deux échelles de temps.

Nous avons établi plus haut que si deux échelles de temps sont telles qu'elles assurent toutes deux l'égalité de l'action et de la réaction, elles ne diffèrent que par un changement d'origine et d'unité [on effectue un changement d'échelle de temps $\tau = g(t)$ et l'on vérifie que l'égalité de l'action et de la réaction ne subsiste que si $g'' = 0$]. Dans le système (c), l'échelle $[t]_c$ est définie par la condition d'assurer un

mouvement uniforme à un point matériel M éloigné des autres, ce qui peut être représenté symboliquement par

$$:[t]_{;c} =_d \left(\frac{dM}{dt} = \text{Cte} \right),$$

où M est un point matériel introduit par la première partie du postulat VIc. Dans le système (b) l'échelle $[t]_b$ est définie par la condition d'assurer l'égalité de l'action et de la réaction, ce qui peut se noter :

$$\{[t]\}_b =_d [\mathfrak{N}(T_0, [t]) \rightarrow \{m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij}\} \simeq 0].$$

Mais de l'implication (11) il résulte qu'une échelle au sens (c) l'est au sens (b) , donc

$$:[t]_{;c} \subseteq [t]_{;b}$$

or une échelle $[t]$ privilégiée au sens (c) étant une échelle privilégiée au sens (b) , toutes les autres échelles au sens (b) se déduiront de celle-ci par un changement d'origine et d'unité. De plus toutes les échelles privilégiées au sens (c) se déduisent d'une échelle particulière par un changement d'origine et d'unité, par suite toute échelle privilégiée au sens (b) l'est aussi au sens (c) , les postulats de (c) étant admis. On a donc

$$(13) \quad (VIc) \& (VIIc) \rightarrow \{[t]\}_b = \{[t]\}_c.$$

De l'implication (12) résulte alors par transitivité

$$(VIc) \& (VIIc) \rightarrow [(VIIIc) \leftrightarrow (VIIb)].$$

On en tire par la règle d'importation

$$(14) \quad (VIc) \& (VIIc) \& (VIIIc) \rightarrow (VIIb).$$

Dans le cas d'un ensemble $\mathbf{E}$ fini de points matériels les implications (8) et (11) montrent que le système de postulats (c) entraîne le système (b) .

Dans le cas d'un ensemble infini dénombrable de points matériels dans l'univers (supposition qu'on fait dans la théorie de Milne par exemple) il faut encore considérer VIIIb qui s'exprime par

$$(15) \quad \{[t]\}_b =_d [\mathfrak{N}(T_0, [t]) \rightarrow \{m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij}\} \sim 0] \& \mathfrak{N}(T_0, [t]) \rightarrow \\ \rightarrow \forall \varepsilon. \exists r. [\forall M_k. \left| \overrightarrow{MM_k} \right| > r \rightarrow |\Phi_M| < \varepsilon].$$

Or VIc s'exprime par les deux formules suivantes :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}(T_0, [\tau]) \rightarrow \forall \varepsilon. \exists r. [\forall M_j. |\overrightarrow{MM_j}| < r \rightarrow \exists D. \text{dist}(M, D) < \varepsilon] \\ [t] =_d \left(\frac{dM}{dt} = \text{Cte} \right). \& . \mathfrak{N}(T_0, [t]) \rightarrow \\ \rightarrow [\forall M'. \forall \varepsilon. \exists r. (\forall M_j. |\overrightarrow{M'M_j}| > r \rightarrow |\Phi_{M'}| < \varepsilon)] \end{array} \right.$$

VIIIb est de la forme

$$(15') \quad q \& r(t) \rightarrow s(M),$$

tandis que VIc est de la forme

$$(16') \quad r(\tau) \rightarrow u, \quad p \& r(t) \rightarrow \forall M'. s(M'),$$

q exprime que l'échelle de temps est telle que le principe d'égalité de l'action et de la réaction est valable, p que l'échelle de temps est telle que le point M infiniment éloigné des autres points matériels a une vitesse constante. Mais (13) exprime justement l'équivalence de ces deux échelles de temps, qui s'écrit avec la notation p, q :

$$(13') \quad (\text{VIc}) \& (\text{VIIc}) \rightarrow (p \leftrightarrow q),$$

par *modus ponens* on tire

$$\vdash q \rightarrow p.$$

par composition

$$\vdash q \& r(t) \rightarrow p \& r(t).$$

De VIc et par transitivité de l'implication, on a

$$\vdash q \& r(t) \rightarrow \forall M'. s(M'),$$

mais M' ne figure ni dans q ni dans r (qui ne font que fixer l'échelle de temps et le repère), par suite on a

$$\vdash q \& r(t) \rightarrow s(M'),$$

or ceci est VIIb. Donc on dérive VIIb du système (c). On voit aussi que (13) et VIIIc entraîne VIIIb par suite VIb, VIIb, VIIIb sont bien des conséquences des postulats VIc, VIIc, VIIIc, donc

$$(c) \text{ entraîne } (b).$$

10. Le système (c) dérive de (b). — Il nous faut maintenant établir la réciproque : admettons le système (b) de postulats et montrons que nous en déduisons le système (c).

Considérons une échelle de temps privilégiée $[t]$ définie par VI*b*, puis considérons VIII*b* (soit qu'on admette VIII*b* indépendamment, cas d'un ensemble infini dénombrable de points matériels, soit que VIII*b* résulte de VII*b*, cas d'un ensemble fini de points matériels). Alors pour un point M_i infiniment éloigné des autres on aura $|\Phi_i| < \varepsilon$, par suite le mouvement du point M_i est infiniment voisin d'un mouvement rectiligne et uniforme; si l'on effectue un changement d'échelle de temps cinématique, alors le mouvement du point M_i , est infiniment voisin d'un mouvement rectiligne avec une abscisse toujours décroissante, ce qui établit VI*c*. D'une façon plus précise, $[t]_b$ désignant une échelle de temps privilégiée au sens (*b*) (introduite par VI*b*), on a

$$(17) \quad \mathcal{N}(T_0, [t]_b) \rightarrow [\forall \varepsilon. \exists r. (\forall M_j. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow |\Phi_i| < \varepsilon)]$$

d'autre part

$$\forall \eta. \exists \varepsilon_1. |\Phi_i| < \varepsilon_1 \rightarrow \left| \frac{dM_i}{dt} - \mathbf{v}_0 \right| < \eta.$$

Comme ε , choisissons un ε_1 qui assure la seconde implication, à tout η on peut donc associer un r qui assure $\left| \frac{dM_i}{dt} - \mathbf{v}_0 \right| < \eta$, on a ainsi

$$\mathcal{N}(t_0, [t]_b) \rightarrow [\forall \eta. \exists r. (\forall M_j. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow \left| \frac{dM_i}{dt} - \mathbf{v}_0 \right| < \eta)].$$

La vitesse de M_i peut donc être choisie aussi constante qu'on le veut pourvu que r soit assez grand si l'échelle de temps $[t]_b$ est une échelle de temps privilégiée au sens (*b*). Donc

$$(VIb) \ \& \ (VIIIb) \rightarrow \{[t]\}_b \subseteq \{[t]\}_c.$$

Mais toutes les échelles au sens (*c*) ne diffèrent que par un changement d'unité. Elles s'obtiennent donc toutes à partir d'une échelle $[t]_b$; or toutes les échelles $[t]_b$ se déduisent l'une de l'autre de cette façon, donc si l'on admet le système (*b*), les échelles privilégiées au sens (*b*) le sont aussi au sens (*c*) et inversement, ainsi

$$(VIb) \ \& \ (VIIIb) \rightarrow :[t]_b = :[t]_c,$$

par suite on a

$$(18) \quad (VIb) \ \& \ (VIIIb) \rightarrow [\mathcal{N}(T_0, [t]_b) \leftrightarrow \mathcal{N}(T_0, [t]_c)].$$

En vertu de la transitivité de l'implication, de cette relation et de VIII*b*, on tire

$$(19) \quad \vdash_b \mathcal{N}(T_0, [t]_c) \rightarrow [\forall \varepsilon. \exists r. (\forall M_j. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow |\Phi_i| < \varepsilon)].$$

Le premier membre est indépendant de M_i , on peut donc quantifier le second membre, d'où

$$\vdash_b \mathcal{N}(T_0, [t]_c) \rightarrow [\forall M'. \forall \varepsilon. \exists r. (\forall M_j. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow |\Phi_{M'}| < \varepsilon)],$$

mais la définition de $[t]_c$ est

$$[t]_c =_d \left(\frac{dM}{dt} = \text{Cte} \right).$$

On peut remplacer le premier membre par cette expression, ce qui donne la troisième partie de VIc. On a d'autre part en Cinématique

$$\forall \eta. \exists \varepsilon_1. |\Phi_i| < \varepsilon_1 \rightarrow \exists D. \text{dist}(M, D) < \eta.$$

Dans (19) on peut alors choisir ε pour que la relation précédente soit remplie, on aura donc

$$\vdash_b \mathcal{N}(T_0, [t]_c) \rightarrow [\forall \eta. \exists r. (\forall M_j. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow \exists D. \text{dist}(M_i, D) < \eta)].$$

Mais en vertu de la Cinématique, l'implication reste valable si l'on change d'échelle de temps cinématique (un mouvement rectiligne reste rectiligne par changement d'échelle de temps), d'où

$$\vdash_b \mathcal{N}(T_0, [\tau]) \rightarrow [\forall \eta. \exists r. (\forall M_j. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow \exists D. \text{dist}(M_i, D) < \eta)],$$

or ceci constitue la première partie de VIc.

En Cinématique on établirait aussi que l'abscisse du point P de la droite D qui est à la plus petite distance de M_i aura une abscisse toujours croissante ou toujours décroissante selon le sens choisi sur D. Ainsi VIc est établi puisque nous avons démontré ses trois parties, donc

$$(VIb) \& (VIIIb) \rightarrow (VIc)$$

(VIIb et VIIIc ont même forme, mais dans un cas il figure $[t]_b$, dans l'autre $[t]_c$). De (14) et de VIIb nous tirons VIIIc par transitivité de l'implication, donc

$$(VIb) \& (VIIb) \& (VIIIb) \rightarrow (VIIIc).$$

Il reste à établir VIIc. Partons de VIb :

$$\exists [t]. \mathcal{N}(T_0, [t]) \rightarrow \{m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij}\} \simeq 0,$$

soit une échelle $[t]_b$ de temps satisfaisant à cette condition, on aura

$$\vdash_b \mathcal{N}(T_0, [t]_b) \rightarrow \{m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij}\} \simeq 0.$$

Utilisons alors (11), par transitivité de l'implication on aura VIIc, soit

$$(VIb) \& (VIIIb) \rightarrow [\mathcal{N}(T_0, [t]_c) \rightarrow \{m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij}\} \simeq 0]$$

Donc le système de postulats (b) entraîne le système (c), soit

$$(b) \rightarrow (c).$$

Nous avons donc

THÉORÈME III. — *Les systèmes (b) et (c) de postulats sont équivalents, soit*

$$(VIb) \& (VIIb) \& (VIIIb) \leftrightarrow (VIc) \& (VIIc) \& (VIIIc).$$

Si l'on ne considère qu'un ensemble E fini de points matériels alors VIIIb est superflu et dérive de VIb & VIIb.

11. Équivalence des systèmes (a), (b), (c) de postulats. — Il suffit d'établir l'équivalence de (a) soit avec (b) soit avec (c). Comme les échelles de temps privilégiées sont définies de la même façon en (a) et en (c), il est préférable d'établir l'équivalence de (a) et (c). Cette fois interviendra le postulat Vc qui est identique à Vb, car ce postulat est essentiellement différent des postulats du système (a).

On remarque d'abord que Va et VIc (principe de l'inertie) ont même forme, mais T_0 n'est pas défini de la même façon dans Va et dans VIc. Nous établirons l'équivalence de ces deux postulats en établissant l'équivalence des repères fondamentaux T_0 définis des deux manières (on se trouve dans des conditions analogues à celles de $[t]_b$ et $[t]_c$ du cas précédent).

De même VIa (action et réaction) et VIIa (masse) ont pour conséquence le théorème de l'égalité de l'action et de la réaction qui a même forme que VIIc, mais où l'on a pour T_0 la même distinction à faire que dans le principe de l'inertie et où les Φ_{ij} et Φ_{ji} n'ont pas non plus la même signification. D'autre part, comme nous l'avons remarqué plus haut, du théorème d'égalité de l'action et de la réaction et du principe de l'inertie on tire un théorème ayant la même forme que VIIIc, T_0 et les Φ ayant subi les mêmes modifications que précédemment.

Admettons le système (a) de postulats et cherchons à en déduire le système (c). Tout d'abord le postulat VIIa (principe de la masse) conduit à définir univoquement un système $\{m_i\}$ de masses. En effet, on choisit arbitrairement m_1 et l'on pose

$$\frac{m_j}{m_1} = d \frac{|\mathbf{r}_{j1}|}{|\mathbf{r}_{1j}|}.$$

Γ_{ij} et Γ_{ji} étant respectivement les accélérations prises par M_j et par M_i , lorsque cette paire M_i, M_j est infiniment écartée des autres points matériels. Le principe de la masse (postulat VII *a*) a pour conséquence que la masse m_j est une propriété intrinsèque du point M_j et ne dépend ni de M_i ni des autres points matériels (¹).

Le principe du repère fondamental (postulat X *a*) fixe que le repère fondamental T_0 est un repère principal pour ce choix m_i des masses (de l'univers U sous forme cosmologique, d'un ensemble E sous forme positiviste); on a donc, en désignant par $T_p(E, \{m_i\})$ un trièdre principal pour l'ensemble E dont les points M_i sont affectés des masses m_i :

$$T_0 = {}_d T_p(U, \{\tilde{m}_i\}) \quad \text{ou} \quad T_0 = {}_d T_p(E, \{m_i\}).$$

Le postulat VIII *a* (principe de superposition) fixe

$$\Gamma_i = \sum_j \Gamma_{ji}.$$

où Γ_{ji} est l'accélération que prendrait le point M_i si la paire M_j, M_i était infiniment écartée des autres points. Mais d'après le principe des équations différentielles, on a

$$\Gamma_i = \Phi_i, \quad \Gamma_{ji} = \Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; \tau)$$

d'où

$$\Phi_i = \sum_j \Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; \tau),$$

où ici les Φ_{ij} sont les forces accélératrices de paires M_j, M_i infiniment écartées des autres points matériels (remarquons que dans le postulat V *a* on ne donne pas d'interprétation de ce genre des Φ_{ji}).

Nous avons alors réalisé les conditions du postulat V *c* (identique à V *b*) qui s'exprime par

$$\exists \{m_i\}. T_0 = {}_d T_p(E, \{m_i\}) \& \mathcal{N}(T_0, [\tau]) \rightarrow \Phi_i = \sum_{j \in E} \Phi_{ji}(M_i, M_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; \tau).$$

En effet, on a indiqué un choix de masses m_i permettant de définir un trièdre principal par rapport auquel il y a décomposition de Φ_i en une somme de Φ_{ji} . Donc

$$(VII\ a) \& (VIII\ a) \& (X\ a) \rightarrow (V\ c).$$

(¹) Voir par exemple J.-L. DESTOUCHES, *Principes de la Mécanique classique* (C. N. R. S., Paris, 1948), p. 46 à 48.

Cherchons maintenant à obtenir VIc (principe de l'inertie) comme une conséquence du système (a). Le postulat VIc a même forme que Va (inertie) mais T_0 n'est pas défini de la même façon dans les deux cas. On obtiendra donc VIc si l'on montre que T_0 au sens (a) est encore un T_0 au sens (c). Ce fait découle de ce qui précède puisque pour T_0 au sens (a), on obtient Vc satisfait par ce T_0 et que Vc définit T_0 au sens (c); donc tout T_0 au sens (a) est un T_0 au sens (c) et par suite on a VIc, donc

$$(Va) \& (VIIa) \& (Xa) \rightarrow (VIc).$$

Établissons VIIc (égalité de l'action et de la réaction). De VIa (action et réaction), qui s'exprime d'une façon précise par

$$\mathfrak{N}(T_0, [t]) \& \forall \varepsilon. \exists r. \forall M_i. \left| \overrightarrow{M_i M_1} \right| > r \& \left| \overrightarrow{M_i M_2} \right| > r \rightarrow \\ \rightarrow \exists \lambda. \left| \mathbf{r}_{21} - \lambda \overrightarrow{M_2 M_1} \right| < \varepsilon \& \exists \mu. \left| \mathbf{r}_{12} - \mu \overrightarrow{M_1 M_2} \right| < \varepsilon \& \lambda, \mu > 0$$

et de VIIa (masse) on tire le théorème d'égalité de l'action et de la réaction pour une paire M_i, M_j infiniment éloignée,

$$m_j \mathbf{r}_{ij} + m_i \mathbf{r}_{ji} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \mathbf{r}_{ji} + m_j \overrightarrow{OM_j} \wedge \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{0}.$$

En vertu de IV (principe des équations différentielles) on peut remplacer dans ces relations les $\mathbf{r}$ par des Φ et les relations précédentes expriment que le système des deux vecteurs $m_i \Phi_{ji}$ et $m_j \Phi_{ij}$ est équivalent à zéro, on a donc

$$\{ m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij} \} \simeq 0.$$

Mais d'après VIIIa (superposition) dans un système, Φ_i se décompose en une somme de Φ_{ji} (qui sont ceux considérés ci-dessus de la paire M_i, M_j infiniment éloignés des autres points matériels); donc pour les paires de points d'un système rapportés au repère défini par Xa et à une échelle $[t]$, on a encore la relation précédente qui n'est autre que VIIc :

$$\mathfrak{N}(T_0, [t]) \rightarrow \{ m_i \Phi_{ji}, m_j \Phi_{ij} \} \sim 0.$$

Donc

$$(VIa) \& (VIIa) \& (VIIIa) \& (Xa) \rightarrow (VIIc).$$

On a établi Vc, VIc, VIIc, c'est-à-dire le système (c) dans le cas d'un ensemble fini de points matériels (forme positiviste ou forme cosmologique avec un univers formé d'un ensemble fini de points matériels). Dans le cas d'un univers formé d'un ensemble infini dénom-

brable de points matériels, il faut encore établir VIIIc pour que le système (a) entraîne le système (c). Considérons une paire M_i, M_j infiniment écartée des autres points matériels, la force accélératrice de M_i est Φ_{ji} dans ces conditions. Écartons indéfiniment M_i de M_j , d'après Va (inertie), on aura

$$\mathfrak{N}(T_0, [\iota]) \rightarrow [\forall \varepsilon. \exists r. |\overrightarrow{M_i M_j}| > r \rightarrow \Phi_{ji} < \varepsilon],$$

ce qui a même forme que VIIIc; T_0 est pris ici au sens (a) mais nous avons vu plus haut qu'un T_0 au sens (a) l'est aussi au sens (c), on a donc établi VIIIc :

$$(Va) \& (VIIa) \& (VIIIa) \& (Xa) \rightarrow (VIIIc).$$

Il en résulte que le système (a) entraîne le système (c) donc aussi le système (b),

$$(a) \rightarrow (c) \rightarrow (b)$$

ou plus explicitement

$$(Va) \& (VIa) \& (VIIa) \& (VIIIa) \& (Xa) \rightarrow (Vc) \& (VIc) \& (VIIc) \& (VIIIc).$$

Remarquons que IXa (loi de la gravitation universelle) n'intervient pas et que ce postulat doit être ajouté sans aucune modification au système (c) ou au système (b) pour le compléter.

12. Le système (a) dérive de (c). — Partons de Vc et VIc; pour le repère T_0 défini par Vc, en vertu de VIc (inertie) les conditions du principe de l'inertie Va sont réalisées; les deux dernières parties de Va sont identiques à VIc avec T_0 qui n'est pas défini de la même façon, par contre t est défini de la même manière dans les deux cas; la première partie de Va a pour forme

$$\exists T_0. \mathfrak{N}(T_0, [\tau]) \rightarrow \forall M. \forall \varepsilon. \exists r. (\forall M_i. |\overrightarrow{M M_i}| > r \rightarrow \exists D. \text{dist}(M, D) < \varepsilon)$$

tandis que la première partie de VIc ne diffère de cette formule que par l'absence du quantificateur $\exists T_0$. Comme Vc et VIc fournissent un T_0 qui remplit cette condition, la formule est établie, donc

$$(Vc) \& (VIc) \rightarrow (Va).$$

D'autre part VIIc fournit l'égalité de l'action et de la réaction pour une paire M_1, M_2 au sein d'un système rapporté à T_0 au sens (c). D'après la dernière partie de Vc, les Φ_{12} sont indépendants du système dans lequel entre la paire $M_1 M_2$, donc demeurent les mêmes si cette

paire est infiniment écartée des autres points. On a donc égalité de l'action et de la réaction dans ce cas, et cela pour un T_0 pour lequel le principe a lieu. De $\{m_1 \Phi_{21}, m_2 \Phi_{12}\} \simeq 0$, on tire en tenant compte du postulat IV (équations différentielles) qui permet de remplacer les Φ par des Γ :

$$m_1 \Gamma_{21} + m_2 \Gamma_{12} = 0, \quad \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \Gamma_{12} = 0,$$

donc $\overrightarrow{M_1 M_2}$, Φ_{12} , Φ_{21} sont tous trois colinéaires, d'où

$$\Gamma_{21} = \lambda \overrightarrow{M_2 M_1}, \quad \Gamma_{12} = \mu \overrightarrow{M_1 M_2}.$$

Des relations précédentes on tire encore

$$(m_1 \lambda - m_2 \mu) \overrightarrow{M_2 M_1} = 0,$$

or, d'après Vc les coefficients m_i sont positifs donc λ et μ sont de même signe, $\lambda \cdot \mu > 0$ et l'on obtient tout le contenu de VIa (action et réaction), ainsi

$$(Vc) \& (VIIc) \rightarrow (VIa).$$

Maintenant de Vc (superposition) on tire $\Phi_i = \sum_j \Phi_{ji}$ pour un T_0 au sens (a). D'après la dernière partie de Vc les Φ_{ij} sont les mêmes que ceux de la paire M_i, M_j infiniment éloignée des autres points matériels. D'après IV on peut remplacer les Φ par des Γ et l'on a

$$\mathcal{N}(T_0, [t]) \rightarrow \Gamma_i = \sum_j \Gamma_{ji},$$

où les Γ_{ij} sont les accélérations de paires infiniment éloignées des autres points matériels, or ceci est l'énoncé de VIIIa (superposition), donc

$$(Vc) \& (VIc) \rightarrow (VIIIa).$$

Comme nous avons établi l'égalité de l'action et de la réaction pour des paires isolées et rapportées à un repère pour lequel le principe de l'inertie est valable, on en tire en prenant les longueurs de vecteurs

$$m_i |\Gamma_{ji}| = m_j |\Gamma_{ij}|$$

et cela pour toute paire M_i, M_j de points matériels, donc

$$\frac{m_i}{m_j} = \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Gamma_{ji}|}, \quad \frac{m_i}{m_k} = \frac{|\Gamma_{ik}|}{|\Gamma_{ki}|}, \quad \frac{m_k}{m_j} = \frac{|\Gamma_{kj}|}{|\Gamma_{jk}|}$$

et l'on a évidemment

$$\frac{m_i}{m_j} = \frac{m_i}{m_k} \frac{m_k}{m_j},$$

remplaçons les rapports des masses par des rapports d'accéléérations et ceci peut être fait pour tout triple de points matériels, on obtient donc le principe de la masse

$$\mathfrak{N}(T_0; [t]) \rightarrow \big\&_{i,j,k \in E} \left\{ \frac{|\mathbf{F}_{ij}|}{|\mathbf{F}_{ji}|} = \frac{|\mathbf{F}_{ik}|}{|\mathbf{F}_{ki}|} \cdot \frac{|\mathbf{F}_{kj}|}{|\mathbf{F}_{jk}|} \right\},$$

$\big\&_{i,j,k \in E}$ signifiant qu'on fait le produit logique de ces égalités pour tous les triples de points M_i, M_j, M_k , appartenant à l'ensemble E considéré. Donc

$$(Vc) \& (VIc) \& (VIIc) \rightarrow (VIIa).$$

On a ainsi établi tous les postulats du système (a) à partir de ceux du système (c) . Comme (b) entraîne (c) , on a donc

$$(b) \rightarrow (c) \rightarrow (a).$$

Précédemment nous avons établi les implications inverses, il en résulte que ces trois systèmes de postulats sont équivalents, d'où

THÉORÈME 4. — *Les systèmes (a) , (b) , (c) de postulats pour la Mécanique classique sont équivalents.*

$$(a) \leftrightarrow (b) \leftrightarrow (c).$$

Au point de vue physique, il nous semble que le système (b) est préférable aux autres pour les raisons qui ont été indiquées plus haut.

13. Conclusion. — En Mécanique classique, nous voyons se dessiner deux tendances qui s'affirmeront et s'opposeront dans les théories ultérieures : une tendance positiviste d'une part, une tendance réaliste et cosmologique d'autre part. Les anciennes formes des principes de la Mécanique (faisant intervenir les concepts de masse et de force) dérivées directement des principes de Newton étaient fondées sur un réalisme sommaire que les philosophes ont pris l'habitude de qualifier de « naïf ». Les positivistes ont fait faire un grand pas à l'exposé des principes de la Dynamique, Mach principalement qui a eu des vues profondes sur la notion de masse. En introduisant la masse à partir de l'action et de la réaction comme il l'a fait, il évite le concept de masse

qui était toujours plus ou moins métaphysique. Toute science progresse et devient plus claire lorsqu'on réduit le nombre de ses concepts en les remplaçant par des termes définis. Le concept de masse étant ainsi réduit, les principes de la Dynamique s'expriment sans difficulté en termes d'accéléérations au lieu de forces comme l'a fait Painlevé, et les forces se définissent à partir des masses et des accélérations. Mais dans cette façon d'opérer, comme l'a bien souligné Poincaré, le principe essentiel est le principe des équations différentielles. Les autres principes ne font qu'exprimer certaines propriétés des fonctions Φ_i dans des conditions particulières de cadre de référence. Il ne faudrait pas cependant, à l'instar de Poincaré, sous-estimer ces principes et les considérer comme de pures conventions. Bien que tous ces principes soient secondaires par rapport au principe des équations différentielles ils expriment des lois physiques très importantes. Nous verrons dans la troisième partie que dans des tentatives de théorie nouvelle, on remplace le principe des équations différentielles par un autre principe qu'on énonce aisément (principe d'équations d'ondes non linéaires) mais que la difficulté essentielle est de trouver la forme des termes intervenant dans le principe fondamental, c'est-à-dire de trouver des principes jouant le même rôle qu'en Mécanique classique les principes de la Dynamique. Ceux-ci viennent préciser la forme des fonctions Φ_i .

Le principe des équations différentielles introduit d'une façon essentielle la notion de « système physique ». Ceci est nécessaire pour fixer un ordre déterminé au système différentiel. Cependant cette notion de caractère positiviste s'oppose au principe de l'attraction universelle (postulat IX) qui, lui, est d'origine réaliste et conduit à des considérations cosmologiques.

Mais la question du repère fondamental restait à la fois une importante question non résolue aussi bien pour le positiviste que pour le réaliste moderne. Certains auteurs du XIX^e siècle considéraient qu'il existait « quelque part dans l'univers » un corps en repos absolu, le « corps aleph », et faisaient appel à lui pour définir le repère fondamental; d'autres se bornaient à considérer le solide stellaire. Or, par suite de l'attraction universelle par forces centrales, en vertu d'un théorème de Poincaré selon lequel aucun système de points soumis à des forces centrales ne peut constituer un corps solide, le solide stellaire n'est qu'une apparence. Mais comme on ne peut fonder les principes de la Mécanique sur une apparence, on est renvoyé au corps aleph. L'éther lumineux aurait pu jouer le rôle de corps aleph et c'est ce qu'ont pensé certains auteurs. Le résultat négatif des expériences de Michelson vient

écarter aussi cette conception, et le corps aleph apparaît comme purement métaphysique. La question du repère fondamental ne s'est donc posée avec acuité qu'après la naissance de la théorie de la relativité, et c'est par Le Roux que la solution en a été donnée au moyen de la notion de solide principal. Cette fois la définition du repère fondamental qui ne fait plus appel ni au solide stellaire ni au corps aleph est satisfaisante et positive. Il faut encore préciser quel ensemble de points matériels définiront le solide principal. Cette fois l'opposition de tendances entre positivisme et réalisme se manifeste d'une manière effective en obligeant à distinguer deux formes du principe du repère fondamental : une forme positiviste et une forme cosmologique.

La notion du système physique, introduite par le principe des équations différentielles, se restreindra dans une conception réaliste et englobera l'univers dans sa totalité, à cause du principe de l'attraction universelle. Si en plus du principe de l'atomisme classique, on admet qu'il n'y a qu'un nombre fini et déterminé de points dans l'univers, ce dernier constitue un système bien déterminé. Les autres systèmes physiques sont alors des constructions faites pour représenter sommairement certaines parties de l'univers obtenues en négligeant certains termes Φ_{ij} qui décrivent des interactions.

Si l'on suppose l'univers formé d'une infinité dénombrable de points, hypothèse compatible avec l'atomisme (selon lequel dans tout domaine fini il n'y a qu'un ensemble fini de points matériels), la notion de système physique comporte celle de coupure, on supprime certains Φ_{ij} pour ne garder que ceux concernant un ensemble fini et déterminé de points matériels M_k . Mais l'hypothèse de l'infinité dénombrable d'éléments s'oppose au principe des équations différentielles; il faut étendre celui-ci au cas d'une infinité dénombrable de variables et d'équations; cet élargissement ne présente pas de difficulté particulière, il suffit de prendre des précautions analytiques convenables pour que toutes les convergences utiles aient lieu. Ceci exige donc seulement des hypothèses analytiques sur la façon dont décroissent les Φ_{ij} quand $M_i M_j$ croît indéfiniment. On obtient alors les « systèmes physiques » par une coupure; cette notion se distingue de celle d'univers, l'univers n'est pas un système physique au sens du principe des équations différentielles. On doit donc distinguer, d'une part, « l'univers » et, d'autre part les « systèmes physiques observables ». Cette distinction est essentielle en Microphysique.

D'un point de vue positiviste, on considère comme métaphysiques les deux conceptions selon lesquelles l'univers contient un nombre fini

et déterminé de points matériels ou en contient une infinité dénombrable. On distingue d'une part, « l'univers dans son ensemble », d'autre part les « systèmes physiques » formés eux d'un nombre fini et déterminé de points matériels, étant entendu qu'à l'extérieur du système il reste des points matériels. Le « système » est alors une construction de physicien, adéquate selon qu'elle contiendra ou non un ensemble de points matériels tels qu'on pourra négliger les Φ_{ji} concernant des points M_j extérieurs et des points M_i intérieurs au système.

Revenons aux principes de la Mécanique. Les apports de Mach, Painlevé, Poincaré et Le Roux ont levé la plupart des difficultés qui avaient leur origine dans un réalisme naïf prenant pour réalités des entités sans signification. Si l'on groupe les résultats de ces savants, on est conduit au système de principes que nous avons désigné par (a). Mais ce système n'est pas satisfaisant, d'une part parce qu'il y a des surabondances dues au fait que certaines propriétés résultent du choix du repère fondamental comme trièdre principal, d'autre part parce que le principe de la masse issu de Mach n'est pas positif et donc pas satisfaisant (bien qu'il ait marqué un grand progrès). C'est pourquoi nous avons cherché un système de postulats qui évite les surabondances et les hypothèses non physiquement réalisables, considérant les points matériels tous ensemble tels qu'ils se présentent à l'observateur (et non pas par paires envoyées à l'infini). Nous avons énoncé deux systèmes désignés par (b) et (c) fondés sur des propriétés des trièdres principaux et qui font jouer un rôle fondamental au principe de superposition. Nous avons prouvé l'équivalence de ces trois systèmes (a), (b), (c), mais au point de vue physique, (b) nous paraît préférable car il est le plus concis, évite les surabondances, et se présente comme le plus directement physique. Il a aussi l'avantage d'exprimer en termes précis, au moyen de formules, l'idée de Mach qui a joué un rôle important dans l'élaboration des théories relativistes ou cosmologiques récentes, idée selon laquelle la masse d'un point matériel n'est pas une propriété intrinsèque de ce point, mais exprime sa solidarité avec le reste de l'univers, et l'influence qu'il subit de la part des corps très éloignés (et dont l'action par des forces est négligeable). C'est pourquoi l'ensemble (b) de principes est préférable.

Il reste encore bien des difficultés à surmonter dans la notion même de système physique. Évidemment ces difficultés sont très faibles en Mécanique classique, car comme nous l'avons vu on peut élargir le principe des équations différentielles pour le cas d'une infinité

dénombrable de points dans l'univers compatible avec le principe de l'atomisme classique et l'on peut définir les systèmes physiques par une construction qui néglige les Φ_{ji} des points M_j extérieurs au système par une condition d'adéquation. Ces difficultés, faibles ici, se manifesteront d'une façon beaucoup plus nette en Microphysique.

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE ONDULATOIRE

CHAPITRE I

STRUCTURE FORMELLE D'UNE THÉORIE PHYSIQUE

1. **Système en Mécanique ondulatoire.** — En Mécanique ondulatoire non relativiste, la notion de « système mécanique » de la Mécanique classique est modifiée, mais en partie seulement, une partie de cette notion subsistant inchangée.

Tout d'abord en ce qui concerne la terminologie, les parties inséables relativement aux procédés de morcellement envisagés, au lieu d'être appelées « points matériels », sont appelées « corpuscules ». Ensuite, et cela est essentiel, tandis qu'en Mécanique classique, un point matériel est représenté par un point fonction du temps (par rapport au repère fondamental T_0), en Mécanique ondulatoire au contraire, un corpuscule est représenté (dans son mouvement par rapport au repère fondamental T_0) par un *point variable libre*, c'est-à-dire un point dont les coordonnées sont des variables libres. Ces variables figureront comme arguments dans la fonction d'onde du système.

On voit alors que la notion de « système mécanique » elle-même ainsi que celle de « partie d'un système » se conserve inchangée dans le passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire sous sa forme usuelle. Par contre la représentation mathématique d'une partie inséable est complètement modifiée : une telle partie est toujours représentée par un point, mais au lieu d'un point valorisé (point dont les coordonnées sont des fonctions du temps) en Mécanique classique,

on a en Mécanique ondulatoire un point variable libre. Ceci nécessite l'extension de l'espace physique euclidien (R_3) par l'adjonction des variables libres coordonnées des corpuscules du système [espace que nous désignerons par $R_3(X)$].

2. Prévisions et opérateurs. — La Mécanique ondulatoire usuelle se présente essentiellement comme une théorie prévisionnelle : à partir du résultat d'une mesure initiale, on cherche à calculer des prévisions concernant le résultat d'une mesure ultérieure. On peut donc lui appliquer la théorie générale des prévisions ⁽¹⁾ et utiliser ses résultats. Cette théorie montre qu'à toute grandeur physique on peut associer un opérateur linéaire d'un certain espace vectoriel abstrait (en fait un espace de Hilbert).

Par conséquent nous pourrions associer à chaque grandeur physique de la Mécanique ondulatoire un opérateur linéaire convenable qui fournira dans cette mécanique la description mathématique de la grandeur considérée. A une grandeur scalaire correspondra un opérateur jouant le rôle d'un scalaire au point de vue variance, à une grandeur vectorielle correspondra un opérateur vectoriel, c'est-à-dire un vecteur dont les composantes sont des opérateurs. Ceci conduit à l'utilisation du calcul vectoriel gauche ⁽²⁾.

Nous porterons donc notre attention sur l'aspect opératoire de la Mécanique ondulatoire. Cette étude est intéressante car elle révèle le fait qu'une partie de la structure formelle de la Mécanique classique subsiste en Mécanique ondulatoire. On obtient ce résultat à partir de considérations générales.

3. Structure formelle. — Nous dirons qu'une théorie possède une *structure formelle* si elle contient un certain calcul algébrique.

Une structure est déterminée par une ou plusieurs lois internes ou externes de composition entre les éléments d'un ou de plusieurs ensembles. Nous nous appuierons, pour la détermination d'une structure algébrique, sur la définition de N. Bourbaki ⁽³⁾.

⁽¹⁾ J.-L. DESTOUCHES, *Corpuscules et systèmes de corpuscules* (Gauthier-Villars, Paris, 1941) et *Principes fondamentaux de Physique théorique*, t. II (Hermann, Paris 1942).

⁽²⁾ M. CAZIN, *Diplôme d'études supérieures. Recherches sur les applications du Calcul vectoriel gauche à la Mécanique ondulatoire*, Paris, 1946.

⁽³⁾ N. BOURBAKI, *Algèbre*, livre II (Hermann, Paris, 1942; *A. S. I.*, n° 934).

« On appelle structure algébrique sur un ensemble $\mathbf{E}$, toute structure déterminée sur $\mathbf{E}$ par une ou plusieurs lois de composition interne entre les éléments de $\mathbf{E}$ et une ou plusieurs lois de composition externe entre des domaines d'opérateurs $\mathbf{F}$, ... et $\mathbf{E}$, ces lois pouvant être assujetties à satisfaire à certaines conditions (par exemple l'associativité ou la commutativité) ou à avoir entre elles certaines relations ».

Ce qui caractérise l'espèce de la structure algébrique envisagée, c'est le nombre des lois internes et externes de cette structure ainsi que les conditions auxquelles ces lois sont soumises et qui constituent les axiomes de la structure.

Étant données deux structures sur les ensembles $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ nous dirons que ces structures sont de *même espèce* s'il existe une correspondance biunivoque entre leurs lois de composition associant à toute loi interne de l'une une loi interne de l'autre et à toute loi externe de l'une, une loi externe de l'autre. Pour que ces deux structures soient de même espèce, il suffit donc qu'elles aient même nombre de lois de composition internes et même nombre de lois de composition externes.

Deux lois externes associées sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ peuvent avoir ou non le même domaine d'opérateurs; lorsque les domaines d'opérateurs sont les mêmes pour tout couple de lois externes associées sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$, les deux structures considérées sont *homologues*.

Étant données deux structures algébriques homologues sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$, on appelle *isomorphisme* le transport de structure suivant : une application biunivoque f de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{E}'$ permet de déduire les lois internes de $\mathbf{E}'$ des lois correspondantes de $\mathbf{E}$ et l'application identique de chacun des domaines d'opérateurs sur lui-même fournit les lois externes.

Étant données deux structures algébriques de même espèce sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$, on a un *poly-isomorphisme* s'il y a transport de structure au moyen d'une application biunivoque f de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{E}'$ et d'applications biunivoques quelconques des domaines d'opérateurs des lois externes de $\mathbf{E}$ sur les domaines d'opérateurs des lois externes de $\mathbf{E}'$.

Un isomorphisme de $\mathbf{E}$ sur lui-même est un *automorphisme* de $\mathbf{E}$ et un poly-isomorphisme de $\mathbf{E}$, Ω , ... sur eux-mêmes s'appelle un *poly-automorphisme*.

4. Algorithme. — Nous appellerons *équipollence par rapport à une opération interne n-aire* une équivalence complètement régulière et complètement simplifiable par rapport à cette opération.

De même nous appellerons *équipollence par rapport à une opéra-*

tion externe une équivalence régulière et simplifiable par rapport à cette opération.

Une équivalence sera dite une *équipollence par rapport à p opérations externes et par rapport à q opérations internes respectivement n_1 -aire, ..., n_q -aire*, si cette équivalence est une équivalence par rapport à chacune de ces opérations.

Nous appellerons *algorithme simple* un triple $(\mathbf{E}, \Omega, =)$ constitué par un ensemble $\mathbf{E}$, une opération interne n -aire conditionnelle ou non Ω , et une relation d'équipollence $=$ par rapport à cette opération Ω .

Nous appellerons *algorithme à ensemble fondamental* un quadruple $(\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathcal{O}, =)$ constitué par un ensemble $\mathbf{E}$ dit ensemble fondamental, une famille $\mathbf{F}$ d'ensembles auxiliaires, un ensemble $\mathcal{O}$ d'opérations généralisées définies sur $\mathbf{E}$, une relation d'équipollence $=$ par rapport aux opérations de l'ensemble $\mathcal{O}$.

Nous appellerons *algorithme complexe* un quadruple $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{O}, \mathcal{S})$ constitué par une famille d'ensembles fondamentaux $\mathcal{S}$, une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles auxiliaires par rapport aux ensembles de la famille $\mathcal{S}$, un ensemble $\mathcal{O}$ d'opérations généralisées définies chacune sur un des ensembles de la famille $\mathcal{S}$, un ensemble $\mathcal{S}$ d'équipollences définies chacune sur un des ensembles de la famille $\mathcal{S}$ et par rapport aux opérations de l'ensemble $\mathcal{O}$ qui sont définies sur l'ensemble correspondant.

La définition de l'homomorphisme de deux algorithmes se donne aisément. A des relations d'équivalence se trouvent associés des homomorphismes par le procédé des quotients (on doit remarquer que ces homomorphismes sont en réalité des polyhomomorphismes). Parmi ces homomorphismes, l'un joue un rôle particulier : c'est celui défini au moyen des relations d'équipollence.

Une théorie déductive sera dite *contenir un algorithme* si dans cette théorie, il existe au moins un ensemble $\mathbf{E}$ dans lequel est défini au moins une opération généralisée n -aire et une équipollence par rapport à cette ou à ces opérations.

5. Structure d'une théorie. — Selon une définition des plus sommaires, nous entendrons ici par *théorie déductive* ⁽¹⁾ une théorie dans laquelle on distingue d'une part, des *termes* et d'autre part des *énoncés*. Au début d'une théorie déductive, on rencontre un groupe de termes qu'on appelle *termes primitifs* (ou concepts ou termes non définis) et dont

⁽¹⁾ J.-L. DESTOUCHES, *Principes fondamentaux de Physique théorique* (Hermann, Paris, 1942), t. 1, p. 38 et 39.

le sens n'est pas explicité dans le corps de la théorie déductive. Il est de règle de ne se servir, dans une théorie déductive, d'aucun terme n'ayant fait l'objet d'une définition (ou explication) à l'aide des termes primitifs. Certains énoncés de la théorie, dont la vérité est admise sans justification, sont dits *énoncés primitifs* (axiomes ou postulats). Les autres énoncés nécessitent une justification appelée *démonstration* fondée uniquement sur les axiomes, les définitions, les énoncés déjà justifiés et des règles de raisonnement. Un énoncé justifié est un *théorème*.

Etant donné une théorie déductive Th , on appelle *théorie déductive partielle* une théorie dont les termes primitifs, les axiomes et les règles de définition et de raisonnement sont pris parmi les termes primitifs, les axiomes et les règles de la théorie Th .

Une théorie déductive possède une *structure formelle* $\mathcal{S}$ s'il figure dans cette théorie un calcul algébrique généralisé ayant une certaine structure; on dit aussi qu'une théorie déductive possède une structure formelle s'il existe une théorie partielle de cette théorie qui constitue un algorithme muni d'une certaine structure.

Un algorithme sera dit *sous-tendre une théorie déductive* Th s'il existe une théorie partielle de cette théorie Th qui soit isomorphe à l'algorithme considéré. Autrement dit, un algorithme sous-tend une théorie Th , si, dans cette théorie, on peut trouver des termes et des énoncés tels que si, dans l'édification d'une théorie partielle, on prend ces termes comme primitifs, et ces énoncés comme postulats, la théorie partielle ainsi constituée est un algorithme.

Nous dirons qu'un algorithme A est au moins aussi faible qu'un algorithme A' si sa structure est au moins aussi faible que celle de A' ou, ce qui revient au même, si toute règle de calcul valable dans A' est encore valable dans A .

Nous définirons d'autre part un algorithme partiel A^+ d'un algorithme A comme un algorithme obtenu en supprimant certaines règles ou certaines opérations dans l'algorithme A .

D'ailleurs un algorithme peut être considéré comme une théorie déductive; un algorithme partiel A^+ d'un algorithme est une théorie déductive partielle de la théorie envisagée au sens indiqué précédemment.

Un algorithme est dit *maximal* s'il sous-tend complètement une théorie, c'est-à-dire qu'il ne peut être algorithme partiel d'un algorithme sous-tendant la même théorie.

Nous venons de voir qu'une théorie possède une structure formelle si cette structure est celle d'un algorithme qui sous-tend cette théorie. Donc

La structure formelle d'une théorie est la structure de l'algorithme qui la sous-tend complètement.

6. Notion d'adéquation. — En dehors des conditions formelles, une théorie physique doit satisfaire à bien d'autres conditions qui ne sont pas purement formelles et qui ont trait à la justification de l'axiomatique adoptée et à l'adéquation. Il est bien évident que n'importe quelle théorie déductive ne peut pas constituer une théorie physique; il faut avant tout qu'elle ait des rapports avec des expériences faites ou à faire.

En vertu de la définition même d'une théorie physique, on est conduit à poser à titre d'assertion qu'une théorie physique est une théorie déductive qui doit contenir parmi ses termes, les termes suivants : « système physique », « appareil de mesure », « mesure », « résultat de mesure », « prévision », et parmi ses propositions, des « énoncés de résultats de mesures », et des « énoncés de prévisions de résultats de mesures déjà effectuées ».

Ces conditions ne sont évidemment pas suffisantes car il ne s'agit jusqu'ici que de noms donnés à certains termes sans aucune condition sur eux, et par un changement de terminologie, toute théorie déductive peut satisfaire à ces conditions.

La condition qui domine toutes les théories est celle de l'*adéquation*; elle consiste en ceci : les prévisions calculées selon la théorie considérée ne sont pas démontrées fausses par l'expérience. Ceci signifie que si l'on effectue les mesures pour les résultats desquelles on a calculé des prévisions, ces résultats ne sont pas en désaccord avec les prévisions.

L'adéquation n'est jamais totale et définitive, car pour toutes les théories physiques qui ont été jusqu'ici définies, il est toujours apparu des inadéquations. Par conséquent, tout ce qu'on peut espérer est de limiter avec plus ou moins de précision un domaine dans lequel les prévisions calculées suivant la théorie considérée se montrent adéquates.

Quand on est en possession d'une théorie physique *Th*, différents cas se présentent quant à son adéquation ⁽¹⁾ :

1° Il peut arriver que la théorie soit complètement inadéquate, c'est-à-dire que son domaine d'adéquation est vide; dans ce cas la théorie doit être rejetée.

(1) P. DESTOUCHES-FÉVRIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 220, 1945, p. 553 et 587.

2° La théorie peut se révéler parfaitement adéquate (avec une précision donnée pour les mesures) dans le champ expérimental qu'on considère (par exemple, Mécanique newtonienne quand on expérimente dans le domaine macroscopique); dans ce cas, la théorie demeurera toujours valable dans ce champ, c'est-à-dire qu'elle permettra de faire des prévisions qui se vérifieront, et cela quels que soient les progrès ultérieurs de la Physique théorique. Par contre si le champ expérimental est élargi, les limites du domaine d'adéquation de la théorie peuvent apparaître; de tels cas se sont présentés à plusieurs reprises au cours du développement de la Physique moderne.

3° Dans le domaine expérimental considéré, la théorie peut être partiellement adéquate, c'est-à-dire qu'on peut déterminer dans ce domaine un ensemble dans lequel la théorie se trouve adéquate avec une précision donnée pour les mesures; dans ce cas la théorie admet cet ensemble comme domaine d'adéquation et elle demeurera toujours valable dans ce champ.

Quand on est dans le cas 2°, l'histoire des sciences montre qu'on est toujours ramené au cas 3° par un élargissement suffisant du champ expérimental considéré.

4° Il peut arriver enfin que la théorie soit gauchement adéquate; alors dans un certain domaine expérimental elle permet de faire des prévisions exactes tout en fournissant des prévisions inexactes dans d'autres cas sans qu'il soit possible de délimiter un domaine d'adéquation d'une manière générale et simple. L'ancienne théorie des quanta fournit un exemple d'une telle théorie. Celle-ci est conservée provisoirement tant qu'on n'a pas trouvé une autre théorie plus adéquate du type 2° ou 3° pour la remplacer. Généralement une théorie de cette sorte présente soit une contradiction interne plus ou moins cachée, soit une contradiction avec le principe restrictif de positivité, mais il peut arriver aussi que la théorie ne présente aucune contradiction.

Pour remplacer une théorie de type 3° ou 4°, il faut rechercher une théorie plus adéquate. Il est évident que de simples directives méthodologiques ne peuvent suffire, il n'existe pas de méthode pour l'invention; cependant la recherche peut être utilement guidée par quelques règles méthodologiques dont l'effet sera surtout de fournir une mise en forme pour toute idée éventuellement acceptable et des conditions pour écarter les idées qui ne conviennent pas. Pour cela, nous examinerons les caractères formels ou non formels des théories physiques.

7. Comparaison de deux théories. — Si l'on compare, sous le rapport de l'adéquation, deux théories (ou plusieurs, deux par deux), les cas suivants peuvent se présenter :

1° Les deux théories Th_1 et Th_2 ont des domaines d'adéquation D_1 et D_2 complètement distincts au sein du champ expérimental. Elles doivent être envisagées simultanément jusqu'à ce qu'elles soient englobées ensemble dans une théorie plus vaste.

2° A partir d'une théorie Th_0 parfaitement adéquate dans un certain domaine D_0 , et à la suite d'un élargissement de son champ expérimental, on édifie une nouvelle théorie Th parfaitement ou partiellement adéquate dans le champ expérimental élargi, mais en tout cas adéquate au moins dans le domaine d'adéquation D_0 de Th_0 , c'est-à-dire donnant pour ce domaine les mêmes prévisions que Th . Alors la théorie nouvelle Th_1 remplace Th_0 devenue inutile.

3° La théorie nouvelle a un domaine d'équation D_1 couvrant une partie du champ expérimental non couverte par Th_0 , mais ne contenant pas la totalité du domaine D_0 de Th_0 . Dans ce cas Th_0 doit être conservée en même temps que Th_1 : les deux théories sont telles que $D_0 - D_1$ et $D_1 - D_0$ ne sont pas vides ; dans la partie commune $D_0 \cap D_1$ elles doivent fournir pratiquement les mêmes prévisions.

L'assertion suivante résulte de cette étude : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une théorie nouvelle Th remplace une théorie ancienne Th_0 est qu'elle fournisse pratiquement les mêmes prévisions que Th_0 dans le domaine d'adéquation D_0 , en possédant un domaine d'adéquation contenant D_0 ; autrement dit, qu'elle respecte la théorie ancienne dans son domaine d'adéquation.*

Étant donnée une théorie Th' susceptible, dans les conditions prévues par cette assertion de remplacer cette théorie Th , nous dirons qu'elle est *meilleure* que Th si son domaine d'adéquation est un vrai sur-ensemble du domaine d'adéquation de la théorie Th ou encore si elle contient le domaine d'adéquation de Th .

8. Algorithme d'une théorie meilleure. — Supposons qu'une théorie Th ne peut être complétée, c'est-à-dire que ce n'est pas une théorie partielle d'une autre. Une théorie Th' meilleure que Th , a un domaine d'adéquation qui contient celui de la théorie Th ; et par suite, tout énoncé vrai de la théorie Th' concernant le domaine d'adéquation de Th ne peut être qu'un énoncé vrai de cette dernière théorie.

S'il y avait un algorithme A' (sous-tendant la théorie Th') plus fort que A (qui sous-tend Th), alors en utilisant cet algorithme, on arriverait, dans le domaine d'adéquation de Th , à des énoncés vrais dans Th' et qui ne le sont pas dans Th . Ce qui prouve :

THÉORÈME. — *Le calcul A' est au moins aussi faible, dans sa structure, que le calcul A .*

Mais ceci ne veut pas dire que Th' n'admette pas d'autre algorithme que A' ; ceci signifie simplement que si Th' est une théorie meilleure que Th , il existe dans Th' un algorithme A' au moins aussi faible que A , sans toutefois que soit exclue pour A' la possibilité de n'être qu'un algorithme partiel de la théorie Th' . En effet, Th' peut se trouver sous-tendu par un algorithme A'' dont A' est un algorithme partiel, cet algorithme A'' n'ayant pas toujours de lien simple avec l'algorithme A .

Lorsqu'une théorie unifie deux ou n théories données, elle est évidemment une théorie meilleure que celles qu'elle unifie. Par conséquent, le théorème précédent s'applique pour chacune des théories unifiées, d'où :

THÉORÈME. — *Si l'on unifie les théories $Th_1, \dots, Th_n$, sous-tendues respectivement par des algorithmes $A_1, \dots, A_n$, dans la théorie unifiante Th il existe un algorithme A admettant des algorithmes partiels $A'_1, \dots, A'_n$ qui sont au moins aussi faibles que le sont respectivement $A_1, \dots, A_n$.*

La Mécanique ondulatoire unifie les théories ondulatoire et corpusculaire. C'est une théorie à la fois meilleure que la Mécanique classique et que la théorie classique des ondes. Par conséquent, elle est sous-tendue par un algorithme qui admet deux algorithmes partiels A'_1 et A'_2 et ces algorithmes sont au moins aussi faibles que le sont respectivement les algorithmes A_1 et A_2 qui sous-tendent la Mécanique classique et la théorie classique des ondes. Or l'algorithme qui sous-tend la Mécanique classique est le calcul vectoriel classique; d'où l'existence, en Mécanique ondulatoire, d'un calcul vectoriel plus faible que le calcul vectoriel usuel.

9. Passage d'une théorie à une autre lorsque les connexions entre observateurs ne sont pas modifiées. — Quand on remplace une théorie physique par une théorie meilleure, deux cas se présentent : ou bien 1° les connexions entre observateurs ne sont pas modifiées, ou bien

2° les connexions sont modifiées (et c'est le cas par exemple dans le passage d'une théorie classique à une théorie relativiste).

Dans le cas 2°, c'est la forme algébrique de la connexion entre les observateurs qui subit une modification; la transformation de la représentation spatio-temporelle des événements lors du passage d'un observateur à un autre observateur varie d'une théorie à l'autre. Dans les théories les plus courantes, l'ensemble de ces transformations forme un groupe et c'est dans ce groupe que la théorie nouvelle introduit un changement. Les algorithmes géométriques sont modifiés. On retrouve l'ancienne structure comme cas limite obtenu en faisant tendre certaines constantes vers zéro (ainsi lors du passage du groupe de Lorentz au groupe de Galilée, on fait tendre vers zéro la constante $\frac{1}{c}$).

Dans le cas 1° ⁽¹⁾ l'invariance des connexions entre observateurs dans Th et Th₀ entraîne l'invariance des algorithmes géométriques dans le passage de l'une à l'autre théorie; il en est ainsi lors du passage d'une théorie classique à la théorie quantique correspondante.

Un algorithme géométrique se définit au moyen d'un système de vecteurs de base $\{\mathbf{e}_i\}$, d'un système de coefficients et de diverses opérations définies dans $(\mathcal{A}, \{\mathbf{e}_i\})$. En outre une théorie physique comprend un système de vecteurs de base associé à chaque observateur (référentiel) et la définition des transformations d'un système de base en un autre qui sont associés au passage d'un observateur à un autre. Les coefficients de ces transformations devront appartenir au système $\mathcal{A}$ des coefficients. Lors du passage de la théorie Th₀ à la théorie Th, ces transformations demeurent les mêmes. Par contre, les algorithmes géométriques peuvent se modifier de la façon suivante : le système de coefficient $\mathcal{A}_0$ de Th₀ devient le système de coefficients $\mathcal{A}$ dans Th. Comme Th doit fournir pratiquement les mêmes résultats que Th₀ dans le domaine d'adéquation de Th₀, tout résultat de Th₀ devra s'exprimer dans Th au moyen des mêmes coefficients (condition de raccordement). Ceci impose que le système $\mathcal{A}$ soit une extension du système $\mathcal{A}_0$. Il se peut que dans cette extension, toutes les propriétés algébriques de $\mathcal{A}_0$ ne subsistent pas; $\mathcal{A}$ aura une structure plus faible que $\mathcal{A}_0$, mais c'est

⁽¹⁾ F. AESCHLIMANN, *Sur la persistance des structures géométriques dans le développement des théories physiques* (C. R. Acad. Sc., t. 232, 1951, p. 695-697).

sur ce point seulement qu'il y a affaiblissement des structures géométriques dans le cas 1°.

Si Th_0 par exemple, est une théorie classique, $\mathcal{A}_0$ est le corps des nombres réels et si Th est la théorie quantique correspondante, $\mathcal{A}$ est un anneau d'opérateurs et l'affaiblissement réside en la perte de la commutation de la multiplication et de l'existence de l'inverse.

On peut limiter l'affaiblissement de la structure de $\mathcal{A}$ en admettant qu'une théorie permet de calculer des prévisions puisque alors, selon M. Destouches, on peut faire correspondre un opérateur à chaque grandeur. *Le système $\mathcal{A}$ est alors un anneau d'opérateurs et ceci fixe sa structure minimale.* Le passage de Th à Th_0 s'effectue par un processus de moyenne.

10. Application au principe de correspondance. — Le principe de correspondance de Bohr présente un côté formel qui résulte des considérations précédentes. Si l'on applique ces considérations à la théorie quantique des champs désignée ici par Th , cette dernière apparaît comme une théorie meilleure que l'Électromagnétisme classique, Th_0 . Les quantités fondamentales de Th_0 sont les champs $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, les potentiels $\mathbf{A}$, $\mathbf{V}$, le vecteur courant $\mathbf{i}$, la densité ρ . Ces quantités sont des fonctions de point et du temps, ou sous forme relativiste, des fonctions de point de l'espace-temps. Comme dans le passage de Th_0 à Th les connexions entre observateurs ne sont pas modifiées, les structures géométriques se maintiennent et aux quantités classiques correspondent respectivement des symboles $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{J}$, $\mathfrak{I}$, appartenant à un système vectoriel dont les coefficients sont pris dans un anneau $\mathcal{A}$ d'opérateurs. La correspondance entre Th et Th_0 se traduit alors par un homomorphisme entre l'algorithme géométrique de Th et celui de Th_0 . Une certaine relation d'équivalence $\equiv$ correspond à l'égalité classique (identité) et une relation $\doteq$ réflexive, symétrique, non transitive, correspond à l'égalité qui figure dans les équations de Maxwell-Lorentz et l'on obtient des équations symboliques de forme lorentzienne pour les champs, soit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &\doteq \text{rot } \mathcal{E}, & \text{div } \mathcal{H} &\doteq 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &\doteq \text{rot } \mathcal{H} - \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}, & \text{div } \mathcal{E} &\doteq 4\pi \mathfrak{I} \quad (\mathcal{J} = \mathfrak{I} \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Les dérivations $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ qui figurent dans les sur-opérateurs **div** et **rot**, doivent alors être des dérivations symboliques convenablement

définies, comme cela sera indiqué au prochain chapitre. On voit ainsi que *les seules considérations de persistance de structure formelle, c'est-à-dire de correspondance, suffisent pour fixer certains des caractères formels de la théorie quantique des champs.*

Même si la théorie quantique des champs doit être remplacée plus tard par une théorie fonctionnelle (issue de considérations sur la théorie de la double solution), l'examen des structures formelles classiques et de leur persistance lors de la quantification donne déjà un sens à la théorie des champs électromagnétiques quantifiés, quelle que soit la signification que puisse lui attribuer une étude de l'aspect physique de la question, et cela que les champs quantifiés soient ou non accessibles à l'expérience.

11. Conclusion. — Les considérations fondées sur la structure formelle des théories physiques nous montrent que l'invariance des connexions entre observateurs lors du passage d'une théorie donnée à une théorie meilleure entraîne l'invariance des algorithmes géométriques dans ce passage. Ceci est notamment le cas lorsqu'on passe d'une théorie classique à la théorie quantique correspondante.

Il en résulte que le calcul vectoriel de la Mécanique classique sera remplacé par un calcul vectoriel plus faible dans lequel, en vertu des résultats de la théorie générale des prévisions, l'anneau des coefficients du calcul vectoriel classique qui est le corps des nombres réels sera remplacé ici par un anneau d'opérateurs.

Nous pouvons donc ainsi mettre en évidence, indépendamment de considérations physiques particulières, un aspect opératoire de la Mécanique ondulatoire que nous allons étudier maintenant.

CHAPITRE II

LA DÉRIVATION DES OPÉRATEURS

1. **Opérateurs et grandeurs intervenant dans les théories.** — Au chapitre précédent, nous avons indiqué qu'à chaque grandeur effectivement mesurable, nous pouvons associer un opérateur linéaire convenable d'un certain espace abstrait ($\mathcal{Y}$). Nous exprimerons ceci d'une façon plus précise par l'énoncé suivant :

Par rapport à un observateur Ob qui rapporte ses observations à un trièdre T_0 et à une échelle de temps $[t]$, à chaque grandeur effectivement mesurable on peut faire correspondre biunivoquement un opérateur linéaire de l'espace ($\mathcal{Y}$).

Un opérateur associé à une grandeur physique possède certaines propriétés (qu'il n'est pas utile de préciser pour le moment). Inversement on peut considérer qu'un opérateur possédant ces propriétés définit une « *grandeur au sens élargi* » ; en effet, il est possible qu'à cet opérateur on ne puisse faire correspondre aucun appareil de mesure, si bien qu'une grandeur définie de cette façon pourra ne pas être effectivement mesurable.

Au cours du développement d'une théorie, il peut arriver qu'on rencontre un tel opérateur se présentant comme une grandeur au sens élargi et que, par la suite, on trouve un procédé de mesure pour cette grandeur. On a ainsi démontré que la grandeur définie par l'opérateur est une grandeur effectivement mesurable, mais une telle démonstration n'est possible que dans certains cas. Nous pouvons donc pour diverses raisons introduire des opérateurs puis les considérer comme définissant des grandeurs au sens élargi.

Dans chaque théorie physique interviennent un certain nombre de grandeurs ; comme l'approximation classique est plus grossière que l'approximation quantique, toute grandeur qui est effectivement mesurable en Mécanique quantique le sera également en Mécanique classique,

mais il se peut que des grandeurs distinctes en Mécanique quantique soient confondues en Mécanique classique. D'autre part, certaines grandeurs des théories classiques peuvent n'être que des grandeurs au sens élargi à l'approximation quantique. On pourrait montrer, une fois admis les principes des théories quantiques, que toute grandeur au sens élargi se réduit, à l'approximation classique, soit à la grandeur nulle (c'est-à-dire à la grandeur ayant toujours 0 pour valeur), soit à une grandeur classique.

Enfin il existe des grandeurs des théories classiques qui ne sont pas mesurables à l'approximation quantique et auxquelles on ne peut faire correspondre aucun opérateur de l'espace ($\mathcal{Y}$). Ce sont des grandeurs non mesurables, nous les appellerons des *grandeurs exclues*. Aux grandeurs exclues nous ne pouvons faire correspondre aucun résultat de mesure ni aucun élément de prévision. Comme l'élément O de l'espace ($\mathcal{Y}$) (espace affine engendré par les éléments de prévision) n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{E}$ des éléments de prévision, nous pouvons convenir de faire correspondre l'élément O aux grandeurs exclues; l'opérateur correspondant à ces grandeurs sera par convention l'opérateur multiplication par 0, nous le désignerons par $\mathfrak{O}$. Tout élément de l'espace ($\mathcal{Y}$) est alors élément propre de l'opérateur associé à une grandeur exclue. Nous poserons la convention suivante :

CONVENTION. — *Les grandeurs intervenant dans les théories classiques auxquelles on ne peut pas faire correspondre en théorie quantique un opérateur satisfaisant aux conditions des grandeurs au sens élargi sont dites « grandeurs exclues » et l'on convient de leur faire correspondre l'opérateur « multiplication par zéro », $\mathfrak{O}$.*

En résumé, les grandeurs d'une théorie quantique se divisent en trois catégories :

- 1° les *grandeurs effectivement mesurables* auxquelles correspondent un opérateur et un appareil de mesure;
- 2° les *grandeurs au sens élargi* auxquelles correspondent un opérateur mais pas d'appareil de mesure;
- 3° les *grandeurs exclues* auxquelles on associe par convention l'opérateur $\mathfrak{O}$ (elles ne sont pas mesurables).

Grâce à ces conventions, à toute grandeur de la Mécanique classique correspond en théorie quantique un opérateur. Comme, d'autre part, la somme de deux opérateurs, le produit de deux opérateurs, et le produit d'un opérateur par un nombre réel fournissent encore un opérateur de

l'espace $(\mathcal{Y})$ à condition que le domaine opérable correspondant ne soit pas vide, on peut considérer l'anneau des opérateurs de l'espace $(\mathcal{Y})$ engendré par les opérateurs associés aux grandeurs au sens élargi.

2. Opérateurs vectoriels. — Considérons un observateur Ob qui étudie un ensemble de corpuscules et rapporte ses observations à une échelle de temps $[t]$ et à un trièdre T_0 lié à un système macroscopique (en abrégé référentiel). Désignons par $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, les vecteurs unitaires du trièdre supposé trirectangle. En multipliant ces vecteurs unitaires par les opérateurs associés aux coordonnées des corpuscules (aucune supposition n'a été faite jusqu'ici sur la forme analytique de ces opérateurs) et en les additionnant comme des vecteurs, on définit des *opérateurs vectoriels de position* des corpuscules. Ceci peut être fait non seulement pour les opérateurs de position mais encore par exemple, pour les opérateurs associés aux composantes des vitesses et aux composantes des accélérations, plus généralement, pour toutes les grandeurs qui dans les théories classiques, ont un caractère vectoriel. De cette façon, nous définissons des opérateurs vectoriels correspondant à des grandeurs de rang 3. On définirait de façon analogue, des opérateurs tensoriels.

Considérons des trièdres dont les paramètres sont liés aux grandeurs relatives aux corpuscules d'un système (trièdres dont nous dirons qu'ils sont en mouvement quantique) rapportés au trièdre fondamental introduit ci-dessus; on est amené à considérer pour les opérateurs vectoriels, des *composantes droites* et des *composantes gauches* introduites par le fait que la multiplication entre opérateurs est, en général, non commutative ⁽¹⁾. Le calcul vectoriel classique est alors insuffisant et l'on doit utiliser un calcul vectoriel plus général, le calcul vectoriel gauche ⁽²⁾.

3. Extension de l'espace euclidien. — Comme en Mécanique ondulatoire, on introduit des opérateurs de position pour les corpuscules, nous ne pouvons plus nous limiter à considérer l'espace physique euclidien (R_3) , il faut faire intervenir un prolongement de cet espace tel que les composantes des opérateurs de position des corpuscules puissent être des points de cet espace.

⁽¹⁾ J.-L. DESTOUCHES, Cours oral, Faculté des Sciences, Paris, 1942 et 1944.

⁽²⁾ M. CAZIN, *Diplôme d'Études supérieures*, 1946; *Thèse de Doctorat ès sciences*, 1948.

On définit l'ensemble des points de (R_3) repérés par rapport au trièdre fondamental T_0 comme l'ensemble des triples (x, y, z) de nombres réels. Soit $\mathcal{K}$ le corps des nombres réels; (R_3) est alors l'espace à trois dimensions construit sur le corps $\mathcal{K}$.

Désignons par $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1, \dots, \mathfrak{X}_n, \mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Z}_n$ les composantes des opérateurs de position par rapport au repère fondamental T_0 des n corpuscules $C_1, C_2, \dots, C_n$ du système S considéré. En Mécanique ondulatoire, toutes les coordonnées des corpuscules d'un système sont simultanément mesurables. Il en résulte alors que les opérateurs coordonnées commutent entre eux. Nous devons admettre ceci comme un postulat puisque nous n'avons pas encore énoncé jusqu'ici de principes de la Mécanique ondulatoire, d'où :

POSTULAT I. — *Tous les opérateurs coordonnées dans le mouvement rapporté au repère fondamental T_0 commutent entre eux.*

Nous pouvons effectuer une extension transcendante du corps $\mathcal{K}$ des nombres réels de façon à construire un anneau contenant les éléments de $\mathcal{K}$ et les $3n$ opérateurs précédents $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1, \dots, \mathfrak{X}_n, \mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Z}_n$. Désignons par $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ cet anneau qui est commutatif en vertu du postulat précédent. Nous pouvons alors effectuer sur (R_3) la même extension et définir l'espace $(R_3(\mathfrak{X}))$ qui jouera en Mécanique ondulatoire le même rôle que l'espace (R_3) en Mécanique classique. Remarquons que cet espace dépend du nombre n de corpuscules du système.

4. Extension du calcul vectoriel. — Le système vectoriel $\mathcal{S}$ des vecteurs de l'espace (R_3) peut être défini par les trois vecteurs unitaires orthonormés du repère fondamental T_0 et les coefficients appartenant au corps $\mathcal{K}$. Ce calcul vectoriel est celui utilisé en Mécanique classique. Nous pouvons effectuer une extension de ce système vectoriel $\mathcal{S}$ en prenant les coefficients dans l'anneau $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ extension du corps $\mathcal{K}$. Nous obtenons ainsi un système vectoriel $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$. A ce système $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ appartiennent alors les opérateurs vectoriels de position des corpuscules du système physique S considéré.

Mais il nous faut encore étendre ce système de telle façon qu'il contienne les opérateurs des autres grandeurs mécaniques. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des opérateurs engendré par les opérateurs des diverses grandeurs associées au système physique S (il contient les opérateurs de position). Considérons alors l'anneau engendré par le corps $\mathcal{K}$ et l'anneau $\mathcal{O}$; nous le désignerons par $\mathcal{K}(\partial)$ (le symbole ∂ qui représente une dérivation partielle étant mis pour indiquer qu'il s'agit d'une

extension non conservative du corps $\mathcal{K}$ au moyen d'opérateurs). Nous désignerons par $\mathcal{S}(\partial)$ le système vectoriel extension de $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ obtenu en prenant les coefficients des vecteurs dans $\mathcal{K}(\partial)$. C'est ce système $\mathcal{S}(\partial)$ que nous appellerons *système vectoriel gauche*.

§. Changement de repère. — Chaque système de trois vecteurs de $\mathcal{S}(\partial)$ constituant une base et un point définissent un repère auquel on peut rapporter le mouvement des corpuscules du système $\mathcal{S}$ considéré. Pour qu'un tel système de trois vecteurs $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$, constitue une base, il faut et il suffit que les vecteurs unitaires $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, des axes du repère fondamental puissent s'exprimer dans le système $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$, sinon ce dernier système ne paramétrise pas tout l'espace. Un vecteur quelconque de $\mathcal{S}(\partial)$ n'appartient pas en général à une base, seuls certains vecteurs peuvent constituer des éléments d'une base. Soit donc $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$, trois vecteurs constituant une base et un point $\mathbf{O}$. Les coordonnées de ce point $\mathbf{O}$ doivent appartenir à l'anneau $\mathcal{K}(\mathcal{X})$, car les points ont pour coordonnées des éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ et non pas de $\mathcal{K}(\partial)$. Un tel système $(\mathbf{O}, \mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ définit un repère.

Nous divisons l'ensemble des repères en trois classes :

1° *La classe des repères commutatifs*; ce seront les repères T_c pour lesquels les coordonnées du point $\mathbf{O}$ et les composantes de $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ par rapport au repère fondamental $T_0 = (\mathbf{O}_0, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ appartiennent au corps $\mathcal{K}$, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{O}_0\mathbf{O}}, \mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$, appartiennent au système $\mathcal{S}$, ou encore que les paramètres du repère T_c par rapport à T_0 appartiennent au corps $\mathcal{K}$.

C'est le cas, par exemple, où l'on choisit un autre repère fixe par rapport au trièdre fondamental T_0 , ou encore le cas où les paramètres sont fonction d'un paramètre numérique t avec valeurs dans $\mathcal{K}$, si le nouveau repère est mobile par rapport au repère fondamental suivant un mouvement donné. Le passage d'un repère de cette classe à un autre de la même classe définit une transformation. L'ensemble de ces transformations constitue un groupe $\mathcal{G}$ qui n'est autre que le groupe des déplacements euclidiens.

2° *La classe des repères non commutatifs holonomes*; ce seront les repères T_{nc} pour lesquels les paramètres appartiennent à $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ sans que tous appartiennent à $\mathcal{K}$. Ceci revient à dire que la position d'un repère T_{nc} (position de l'origine ou direction des axes) est fonction des

opérateurs associés aux positions des corpuscules et indépendante des autres opérateurs associés aux corpuscules.

C'est le cas par exemple, d'un repère dont les axes sont parallèles à ceux d'un repère commutatif et dont l'origine est située en un corpuscule du système ou au centre de gravité.

C'est encore le cas si les axes du repère sont assujettis à passer chacun par un corpuscule donné.

3° *La classe des repères non commutatifs non holonomes* ⁽¹⁾. — Ce seront les repères T_{nn} pour lesquels les paramètres appartiennent à $\mathcal{K}(d)$ sans que tous appartiennent à $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Ceci revient à dire que la position d'un repère T_{nn} (position de l'origine ou direction des axes) est fonction d'opérateurs autres que ceux de position attachés au système S de corpuscules considéré.

C'est le cas, par exemple, d'un repère principal d'un système de corpuscules.

6. Définition des composantes droites et gauches d'un opérateur vectoriel. — Dans l'espace euclidien (R_3) , considérons l'ensemble $\mathfrak{S}$ des vecteurs; soient $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, les vecteurs unitaires du trièdre fondamental T_0 ; tout vecteur $\mathbf{V}$ peut s'écrire

$$\mathbf{V} = a\mathbf{I} + b\mathbf{J} + c\mathbf{K}$$

ou encore

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}a + \mathbf{J}b + \mathbf{K}c$$

puisque dans $\mathcal{K}$ le produit est commutatif, a, b, c , étant des éléments de $\mathcal{K}$ dits *composantes de $\mathbf{V}$* par rapport à T_0 .

Le trièdre fondamental T_0 est défini par ses trois vecteurs de base,

$$\mathbf{I}(1, 0, 0), \quad \mathbf{J}(0, 1, 0), \quad \mathbf{K}(0, 0, 1).$$

On peut faire une extension transcendante $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ du système vectoriel $\mathfrak{S}$ en lui adjoignant les éléments de la forme

$$\mathbf{V} = l\mathbf{I} + m\mathbf{J} + n\mathbf{K} = \mathbf{I}l + \mathbf{J}m + \mathbf{K}n,$$

où l, m, n sont des éléments de $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$, extension transcendante de $\mathcal{K}$. On étend à $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ les opérations vectorielles sur $\mathfrak{S}$ en posant, par

(1) Ces termes sont de M^{me} MOREL-VIARD, *Thèse de Doctorat ès sciences*, Paris, 1948.

définition

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= {}_d(l_1 + l_2) \mathbf{I} + (m_1 + m_2) \mathbf{J} + (n_1 + n_2) \mathbf{K} \\ &= \mathbf{I}(l_1 + l_2) + \mathbf{J}(m_1 + m_2) + \mathbf{K}(n_1 + n_2)\end{aligned}$$

puisque $l_1, \dots, n_2$ appartiennent à $\mathcal{K}(\mathcal{X})$;

$$r\mathbf{v} = {}_d(rl) \mathbf{I} + (rm) \mathbf{J} + (rn) \mathbf{K} = \mathbf{v}_r,$$

r appartenant à $\mathcal{K}(\mathcal{X})$,

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= {}_d l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = l_2 l_1 + m_2 m_1 + n_2 n_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \\ (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) &= {}_d(l_1 m_2 - m_1 l_2) \mathbf{K} + (n_1 l_2 - l_1 n_2) \mathbf{J} + (m_1 n_2 - n_1 m_2) \mathbf{I}.\end{aligned}$$

On peut écrire les égalités précédentes parce que le produit est commutatif dans $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Ces quatre opérations sur $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ satisfont aux mêmes règles de calcul que les quatre opérations analogues sur $\mathcal{S}$ et s'y réduisent quand on prend un vecteur de $\mathcal{S}$.

Effectuons maintenant une seconde extension transcendante de la façon suivante. Soient toujours $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ les vecteurs unitaires du repère fondamental T_0 ; soient $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$, ceux d'un repère orthonormé non commutatif holonome T lié au système de n corpuscules considéré; soit O son origine. Les vecteurs $\overrightarrow{O_0 O}$ et $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ sont des fonctions de $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ et il en est de même des cosinus directeurs α_{ij} du repère non commutatif par rapport au repère fondamental T_0 . Nous avons, en vertu de l'orthonormalité et de la précédente extension :

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \dots, \quad \mathcal{J}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{J} \cdot \mathcal{J} = 0, \quad \dots;$$

et tout vecteur $\mathbf{v}$ de $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ peut s'écrire sous l'une des deux formes

$$\mathbf{v} = \mathcal{A} \mathbf{I} + \mathcal{B} \mathbf{J} + \mathcal{C} \mathbf{K} = \mathcal{a} \mathcal{J} + \mathcal{b} \mathcal{J} + \mathcal{c} \mathcal{K},$$

et en particulier pour les vecteurs coordonnées $\overrightarrow{OM_i}$ des corpuscules, on aura

$$\overrightarrow{OM_i} = \mathcal{X}_i \mathbf{I} + \mathcal{Y}_i \mathcal{J} + \mathcal{Z}_i \mathbf{K} = \mathcal{r}_i \mathcal{J} + \mathcal{y}_i \mathcal{J} + \mathcal{z}_i \mathcal{K},$$

les composantes par rapport à l'un ou à l'autre système de référence appartenant au corps $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Les vecteurs de base $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ sont des vecteurs de $\mathcal{S}$, et $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ ont des composantes dans $\mathcal{K}(\mathcal{X})$, par suite les composantes droites et gauches sont égales car il y a commutation et l'on peut convenir d'écrire aussi

$$\mathbf{v} = \mathbf{I} \mathcal{A} + \mathbf{J} \mathcal{B} + \mathbf{K} \mathcal{C} = \mathcal{J} \mathcal{a} + \mathcal{J} \mathcal{b} + \mathcal{K} \mathcal{c}$$

et

$$\overrightarrow{OM}_t = \mathbf{I} \mathbf{x}_t + \mathbf{J} \mathbf{y}_t + \mathbf{K} \mathbf{z}_t = \mathcal{J} \mathbf{x}_t + \mathcal{J} \mathbf{y}_t + \mathcal{K} \mathbf{z}_t.$$

En vertu de la première extension : $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ appartenant à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{J}, \mathcal{K}$ ayant leurs composantes dans $\mathcal{K}(\mathcal{X})$, on peut poser

$$(\mathcal{J} \cdot \mathbf{I}) = (\mathbf{I} \cdot \mathcal{J}) = \alpha_{11}, \quad (\mathcal{J} \cdot \mathbf{I}) = (\mathbf{I} \cdot \mathcal{J}) = \alpha_{21}, \quad \dots$$

les α_{ij} vérifiant les six relations ordinaires des cosinus directeurs.

Considérons maintenant un vecteur $\mathcal{W}$ du système $\mathcal{S}(\partial)$

$$\mathcal{W} = \mathcal{A} \mathbf{I} + \mathcal{B} \mathbf{J} + \mathcal{C} \mathbf{K}.$$

Nous appellerons *composantes droites du vecteur $\mathcal{W}$* les scalaires a_d, b_d, c_d et *composantes gauches du même vecteur $\mathcal{W}$* les scalaires a_g, b_g, c_g qui entrent en jeu de la façon suivante : nous avons vu que si l'on considère un opérateur vectoriel $\mathcal{W}$ défini par les opérateurs $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ associés aux composantes A, B, C de la grandeur classique $\mathbf{W}$, on peut écrire

$$\mathcal{W} = \mathcal{A}_0 \mathbf{I} + \mathcal{B}_0 \mathbf{J} + \mathcal{C}_0 \mathbf{K} = \mathbf{I} \mathcal{A}_0 + \mathbf{J} \mathcal{B}_0 + \mathbf{K} \mathcal{C}_0,$$

les deux écritures étant indifférentes puisque les quantités $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ et $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ commutent, les composantes de $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ étant constituées par les nombres 0 et 1 qui commutent avec tous les opérateurs. Si l'on effectue ensuite le passage du trièdre fondamental T_0 à un trièdre T en mouvement quantique par rapport à T_0 , le changement du système de référence se traduira par des relations de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \alpha_{11} \mathbf{I} + \alpha_{12} \mathbf{J} + \alpha_{13} \mathbf{K}, \\ \mathcal{J} &= \alpha_{21} \mathbf{I} + \alpha_{22} \mathbf{J} + \alpha_{23} \mathbf{K}, \\ \mathcal{K} &= \alpha_{31} \mathbf{I} + \alpha_{32} \mathbf{J} + \alpha_{33} \mathbf{K}, \end{aligned}$$

les α_{ij} commutant avec les $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ et ce tableau précisant sous forme usuelle les relations entre les $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ et les $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ que nous avons déjà indiquées sous forme de produits scalaires.

Nous supposons que les relations inverses existent puisque tout vecteur a des composantes bien définies dans tout repère (bien que tout vecteur ne puisse être un vecteur de base d'un repère). Ces relations s'écriront alors sous l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \beta_{d,11} \mathcal{J} + \beta_{d,12} \mathcal{J} + \beta_{d,13} \mathcal{K} = \mathcal{J} \beta_{g,11} + \mathcal{J} \beta_{g,12} + \mathcal{K} \beta_{g,13}, \\ \mathbf{J} &= \beta_{d,21} \mathcal{J} + \beta_{d,22} \mathcal{J} + \beta_{d,23} \mathcal{K} = \mathcal{J} \beta_{g,21} + \mathcal{J} \beta_{g,22} + \mathcal{K} \beta_{g,23}, \\ \mathbf{K} &= \beta_{d,31} \mathcal{J} + \beta_{d,32} \mathcal{J} + \beta_{d,33} \mathcal{K} = \mathcal{J} \beta_{g,31} + \mathcal{J} \beta_{g,32} + \mathcal{K} \beta_{g,33}. \end{aligned}$$

Les paramètres $\alpha_{ij}, \beta_{d,mn}, \beta_{g,mn}$ de la transformation dépendent, dans

le cas général, des opérateurs associés aux corpuscules du système; il s'ensuit que dans le trièdre T, l'opérateur $\mathcal{W}$ pourra être écrit sous l'une des deux formes suivantes :

$$\mathcal{W} = a_d \mathcal{J} + b_d \mathcal{J} + c_d \mathcal{K}$$

et

$$\mathcal{W} = \mathcal{J} a_s + \mathcal{J} b_s + \mathcal{K} c_s.$$

Nous voyons ainsi nettement comment s'introduit la distinction entre les composantes droites et gauches d'un vecteur dont les composantes appartiennent à l'anneau non commutatif $\mathcal{K}(\partial)$.

La nécessité de distinguer entre composantes droites et composantes gauches pour les vecteurs du système $\mathcal{S}(\partial)$ rapportés à un trièdre en mouvement quantique par rapport au trièdre fondamental T_0 justifie le nom de repères non commutatifs donné aux trièdres de cette classe.

Remarquons cependant que lorsqu'on a égalité des composantes droites et gauches pour un vecteur particulier, ce fait n'entraîne pas nécessairement la commutativité du trièdre T considéré.

7. Opérations du calcul vectoriel gauche. — Nous définirons les opérations sur les vecteurs du système $\mathcal{S}(\partial)$ par leurs composantes en les rapportant au repère fondamental T_0 . De là on passe sans difficulté aux expressions des composantes droites ou gauches dans un repère quelconque par le procédé qui vient d'être indiqué au paragraphe précédent.

1° Addition de deux vecteurs. — $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ étant deux vecteurs du système $\mathcal{S}(\partial)$ définis par

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{A}_1 \mathbf{I} + \mathcal{B}_1 \mathbf{J} + \mathcal{C}_1 \mathbf{K}, \quad \mathcal{V}_2 = \mathcal{A}_2 \mathbf{I} + \mathcal{B}_2 \mathbf{J} + \mathcal{C}_2 \mathbf{K}.$$

Nous appellerons *somme* de ces deux vecteurs, le vecteur $\mathcal{W}$ défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \mathbf{I} + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) \mathbf{J} + (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \mathbf{K} \\ &= \mathbf{I}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) + \mathbf{J}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) + \mathbf{K}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \end{aligned}$$

et nous écrirons

$$\mathcal{W} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2.$$

Nous pouvons alors énoncer les deux théorèmes suivants qui se démontrent immédiatement :

THÉORÈME 1. — *Le vecteur $\mathcal{W}$ a pour composantes droites par rapport à T, les sommes des composantes droites de $\mathcal{V}_1$ et de $\mathcal{V}_2$ par rapport à T.*

THÉOREME 2. — *Le vecteur $\mathcal{W}$ a pour composantes gauches par rapport à T les sommes des composantes gauches de $\mathcal{V}_1$ et de $\mathcal{V}_2$ par rapport à T.*

2° Multiplication d'un vecteur de $\mathcal{S}(\partial)$ par un scalaire de $\mathcal{K}(\partial)$. $\mathcal{V}$ étant un vecteur appartenant au système $\mathcal{S}(\partial)$ et $\mathbf{r}$ appartenant à $\mathcal{K}(\partial)$, nous distinguerons la multiplication à droite $\mathbf{r}.\mathcal{V}$ de la multiplication à gauche $\mathcal{V}.\mathbf{r}$, et nous poserons par définition :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}.\mathcal{V} &= {}_d(\mathbf{r}\mathcal{A})\mathbf{I} + (\mathbf{r}\mathcal{B})\mathbf{J} + (\mathbf{r}\mathcal{C})\mathbf{K}, \\ \mathcal{V}.\mathbf{r} &= {}_d\mathcal{A}\mathbf{I}\mathbf{r} + \mathcal{B}\mathbf{J}\mathbf{r} + \mathcal{C}\mathbf{K}\mathbf{r}.\end{aligned}$$

On vérifie facilement que

THÉOREME 3. — *Le vecteur produit $\mathbf{r}.\mathcal{V}$ admet pour composantes droites par rapport au trièdre T les produits $\mathbf{r}.\mathbf{a}_d$, $\mathbf{r}.\mathbf{b}_d$, $\mathbf{r}.\mathbf{c}_d$ [effectués dans l'anneau $\mathcal{K}(\partial)$] des composantes droites de $\mathcal{V}$ à gauche par le scalaire $\mathbf{r}$.*

THÉOREME 4. — *Le vecteur produit $\mathcal{V}.\mathbf{r}$ admet pour composantes gauches par rapport au trièdre T les produits $\mathbf{a}_g.\mathbf{r}$, $\mathbf{b}_g.\mathbf{r}$, $\mathbf{c}_g.\mathbf{r}$, des composantes gauches de $\mathcal{V}$ à droite par le scalaire $\mathbf{r}$.*

3° Produit scalaire de deux vecteurs $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ de $\mathcal{K}(\partial)$. Les opérateurs vectoriels $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ étant deux vecteurs du système $\mathcal{S}(\partial)$, nous définirons le produit scalaire de ces deux vecteurs par l'égalité

$$(\mathcal{V}_1.\mathcal{V}_2) = {}_d\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 + \mathcal{C}_1\mathcal{C}_2,$$

$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{C}_2$ étant les composantes de $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ par rapport au trièdre fondamental T_0 ; en remplaçant, dans cette égalité, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{C}_2$ par leurs expressions en fonction des composantes de $\mathcal{V}_1$ et de $\mathcal{V}_2$ par rapport à T (composantes droites de $\mathcal{V}_1$, composantes gauches de $\mathcal{V}_2$) et de α_{ij} , et en tenant compte des relations entre les α_{ij} , on obtient

$$(\mathcal{V}_1.\mathcal{V}_2) = a_{1d}a_{2g} + b_{1d}b_{2g} + c_{1d}c_{2g}$$

et nous aurions de même :

$$(\mathcal{V}_2.\mathcal{V}_1) = a_{2d}a_{1g} + b_{2d}b_{1g} + c_{2d}c_{1g}.$$

On remarquera que $(\mathcal{V}_1.\mathcal{V}_2)$ est en général différent de $(\mathcal{V}_2.\mathcal{V}_1)$.

THÉOREME 5. — *Le produit scalaire non commutatif de deux vecteurs $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ est égal à la somme des produits des composantes droites du premier vecteur par les composantes gauches du second,*

composantes relatives à un trièdre T quelconque dont les paramètres appartiennent à l'anneau $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$.

4° *Produit vectoriel de deux vecteurs.* — Le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$ de $\mathcal{S}(\partial)$ est défini par ces conditions :

a. c'est une opération bilinéaire :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2) \wedge \mathfrak{V}_3 &= \mathfrak{V}_1 \wedge \mathfrak{V}_3 + \mathfrak{V}_2 \wedge \mathfrak{V}_3, & \mathfrak{V}_3 \wedge (\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2) &= \mathfrak{V}_3 \wedge \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_3 \wedge \mathfrak{V}_2, \\ (r.\mathfrak{V}_1) \wedge \mathfrak{V}_2 &= r.(\mathfrak{V}_1 \wedge \mathfrak{V}_2), & \mathfrak{V}_1 \wedge (\mathfrak{V}_2.s) &= (\mathfrak{V}_1 \wedge \mathfrak{V}_2).s. \end{aligned}$$

b. pour les vecteurs unitaires du repère fondamental orthonormé, on a

$$\mathbf{I} \wedge \mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{I} \wedge \mathbf{J} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{J} \wedge \mathbf{I} = -\mathbf{K}.$$

Si l'on ne connaît pas les relations de commutation des composantes droites de $\mathfrak{V}_1$ avec $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$, on ne peut obtenir les composantes du produit à partir des composantes de $\mathfrak{V}_1$ et de $\mathfrak{V}_2$; de même, si l'on n'a pas les relations de commutation entre les composantes gauches de $\mathfrak{V}_2$ et $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$, on ne peut obtenir les composantes droites du produit à partir des composantes de $\mathfrak{V}_1$ et de $\mathfrak{V}_2$; d'ailleurs, le produit vectoriel défini par les conditions ci-dessus n'a pas la variance d'un vecteur; en outre, dans un trièdre non commutatif même orthonormé, en général on a

$$\mathcal{J} \wedge \mathcal{J} \neq 0, \quad \mathcal{J} \wedge \mathcal{J} \neq -\mathcal{J} \wedge \mathcal{J} \neq \mathcal{K}.$$

De ce fait, l'opération que nous venons de définir n'aura pas l'utilité que présentaient les précédentes.

On établit facilement le théorème suivant :

THÉOREME 6. — *L'opérateur $\mathfrak{W}$ produit vectoriel de deux opérateurs vectoriels $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$ dont les composantes sont données par rapport à un trièdre non commutatif T a pour expression*

$$\begin{aligned} \mathfrak{W} = \mathfrak{V}_1 \wedge \mathfrak{V}_2 &= a_{1d}\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}a_{2g} + a_{1d}\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}b_{2g} + a_{1d}\mathcal{J} \wedge \mathcal{K}c_{2g} \\ &+ b_{1d}\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}a_{2g} + b_{1d}\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}b_{2g} + b_{1d}\mathcal{J} \wedge \mathcal{K}c_{2g} \\ &+ c_{1d}\mathcal{K} \wedge \mathcal{J}a_{2g} + c_{1d}\mathcal{K} \wedge \mathcal{J}b_{2g} + c_{1d}\mathcal{K} \wedge \mathcal{K}c_{2g}. \end{aligned}$$

Lorsqu'il y a commutation [cas d'un trièdre commutatif ou cas de vecteurs de $\mathcal{K}(\mathfrak{X})]$, on retombe sur l'expression habituelle. *A fortiori*, la formule classique pour le double produit vectoriel n'a pas lieu et il en résulte que dans les mouvements relatifs les formules classiques pour le moment cinétique et pour la force vive ne sont pas valables; il existe des termes complémentaires (par exemple, cas du rotateur sphé-

rique). Ce calcul vectoriel doit donc nécessairement être utilisé chaque fois qu'on fait intervenir des mouvements relatifs en Mécanique ondulatoire.

8. **La dérivation symbolique des opérateurs.** — Au début de ce chapitre, nous avons été conduite à associer un opérateur à chaque grandeur physique. En Mécanique classique, il existe des relations entre grandeurs qui peuvent s'exprimer à partir des trois opérations, addition, multiplication, dérivation par rapport au temps. Dans l'anneau $\mathcal{K}(\partial)$, nous avons introduit une addition et une multiplication entre opérateurs; de même dans le système $\mathcal{S}(\partial)$, nous avons défini une addition vectorielle, le produit à gauche ou à droite par un scalaire, le produit scalaire, le produit vectoriel. Ces opérations permettent d'exprimer un certain nombre de relations entre grandeurs, mais il nous manque l'opérateur de dérivation qui joue un rôle essentiel en Mécanique. Par exemple, il nous faut lier une coordonnée $\mathbf{r}$ avec la composante correspondante de la vitesse $\mathbf{v}_x$ par une relation de la forme $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_x$. Ceci nécessite donc l'introduction d'une nouvelle opération $\frac{d}{dt}$ qu'on peut appeler dérivation symbolique entre opérateurs.

Habituellement on définit la dérivée $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ d'un opérateur par la formule

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}(\mathbf{A}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{A}),$$

où $\mathbf{H}$ est l'hamiltonien du système; cette définition n'est pas du tout satisfaisante car pour définir un opérateur de nature purement algébrique, on fait appel aux équations de la Mécanique. C'est comme si, pour définir la dérivée usuelle en Mécanique classique on partait des crochets de Poisson et qu'on pose comme définition de $\frac{df}{dt}$ la relation

$$(2) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathbf{H}],$$

car cette relation résulte à la fois de propriétés des dérivées partielles, de propriétés de la dérivée d'une fonction composée, de l'équation $\mathbf{F} = m\mathbf{\Gamma}$ qui présuppose que $\frac{d^2x}{dt^2}$ est déjà défini; ce serait donc faire une erreur de raisonnement que d'adopter la définition précédente. Au contraire, à partir de la définition de $\frac{df}{dt}$ donnée en analyse, on arrive en

Mécanique, en tenant compte de $\mathbf{F} = m\mathbf{T}$, à la relation (2) en tant que relation entre quantités déjà définies. Une démarche semblable doit être effectuée en Mécanique ondulatoire : on doit donner une définition purement algébrique de la dérivée symbolique d'un opérateur, puis par la suite, les symboles $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ et $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ ayant été déjà définis, on arrivera à la relation (1) en vertu des équations de la Mécanique ondulatoire. Une définition de la dérivée symbolique d'un opérateur ne peut être donnée que sous forme réursive.

9. *∂ -anneau d'opérateurs.* — Dans l'anneau d'opérateurs $\mathcal{K}(\partial)$ que nous avons considéré plus haut, nous avons distingué les opérateurs coordonnés $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$, $\mathbf{z}_i$; en Mécanique il faudra distinguer aussi les opérateurs vitesses ou quantités de mouvement. Dans bien des considérations, ces opérateurs jouent tantôt le rôle de variables indépendantes, tantôt le rôle de fonctions de la variable temporelle t , et l'on en prend les dérivées par rapport à t . Ceci conduit donc à distinguer dans les éléments de $\mathcal{K}(\partial)$ un sous-ensemble des variables et un sous-ensemble des dérivées de ces variables par rapport au temps ou bien des différentielles de ces variables. Nous devons donc considérer un ensemble d'opérateurs dans lequel nous distinguerons de tels sous-ensembles particuliers, soit :

Nous appellerons *∂ -anneau* un anneau $\mathcal{E}$ d'opérateurs (opérateurs agissant sur un certain ensemble donné de fonctions) soumis aux conditions suivantes ⁽¹⁾ :

1° $\mathcal{E}$ admet un élément unité 1; en tant qu'anneau il contient un élément zéro 0 et $\mathbf{A} \in \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{A} \cdot 0 = 0 \cdot \mathbf{A} = 0$;

2° $\mathcal{E}$ contient un certain sous-ensemble fini $\mathcal{E}_v$ dit *ensemble des variables indépendantes*;

3° $\mathcal{E}$ contient un sous-ensemble fini $\mathcal{E}_d$ dit *ensemble des différentielles symboliques des variables indépendantes* tel que, à chaque $\mathbf{x}_i \in \mathcal{E}_v$ correspond un élément $d\mathbf{x}_i$ bien déterminé appartenant à $\mathcal{E}_d$;

$$\mathbf{x}_i \in \mathcal{E}_v \rightarrow d\mathbf{x}_i \in \mathcal{E}_d.$$

Les ensembles $\mathcal{E}_v$ et $\mathcal{E}_d$ sont sans élément commun :

$$\mathcal{E}_v \cap \mathcal{E}_d = \emptyset$$

⁽¹⁾ F. DESTOUCHES-AESCHLIMANN, *Dérivée et différentielle totale d'un opérateur* (C. R. Acad. Sc., t. 236, 1953, p. 354-355).

et en général une différentielle $d\mathfrak{x}_i$ ne commute ni avec $\mathfrak{x}_i$ ni avec les autres variables $\mathfrak{x}_k$.

10. Dérivée partielle. — Soit un ∂ -anneau $\mathcal{E}$, la *dérivée partielle* (symbolique) $\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i}$ d'un élément $\mathfrak{f}$ appartenant à $\mathcal{E}$ par rapport à la variable $\mathfrak{x}_i$ de $\mathcal{E}_\nu$ sera définie récursivement de la façon suivante :

- I. $\frac{\partial 1}{\partial \mathfrak{x}_i} = 0, \quad \frac{\partial 0}{\partial \mathfrak{x}_i} = 0;$
- II. $\frac{\partial \mathfrak{x}_k}{\partial \mathfrak{x}_i} = \delta_{ik} \bullet \quad \text{pour } \mathfrak{x}_i \in \mathcal{E}_\nu \text{ et } \mathfrak{x}_k \in \mathcal{E}_\nu;$
- III. $\frac{\partial (\mathfrak{f} + \mathfrak{g})}{\partial \mathfrak{x}_i} = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \mathfrak{x}_i};$
- IV. $\frac{\partial (\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g})}{\partial \mathfrak{x}_i} = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{g} + \mathfrak{f} \cdot \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \mathfrak{x}_i};$
- V. si $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ alors $\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \mathfrak{x}_i},$

ces règles ayant lieu pour $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ appartenant à $\mathcal{E}$ et possédant une dérivée calculable par les règles précédentes.

Un opérateur $\mathfrak{f}$ de $\mathcal{E}$ sera dit *dérivable partiellement par rapport à $\mathfrak{x}_i$* si l'on peut associer à $\mathfrak{f}$ un opérateur $\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i}$ déterminé par les règles précédentes et appartenant à $\mathcal{E}$.

11. Propriétés des dérivées partielles symboliques. — 1° Si $\mathfrak{f} \in \mathcal{E}$ possède un inverse $\mathfrak{f}^{-1} \in \mathcal{E}$, on a

$$\mathfrak{f}^{-1} \cdot \mathfrak{f} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f}^{-1} = 1.$$

Dérivons cette relation il vient, d'après les règles IV et I :

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{-1}}{\partial \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{f} + \mathfrak{f}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{f}^{-1} + \mathfrak{f} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}^{-1}}{\partial \mathfrak{x}_i} = 0;$$

d'où, en multipliant par $\mathfrak{f}^{-1}$ soit à droite soit à gauche selon la relation précédemment utilisée, on obtient

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{-1}}{\partial \mathfrak{x}_i} = -\mathfrak{f}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{f}^{-1}.$$

2° Soit m un entier positif, on a

$$(3) \quad \frac{\partial \mathfrak{f}^m}{\partial \mathfrak{x}_i} = \sum_{p=0}^{m-1} \mathfrak{f}^{m-p-1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{f}^p.$$

En effet, cette relation a lieu pour $m = 2$, car

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^2}{\partial \mathfrak{x}_i} = \mathfrak{f} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{f}.$$

D'autre part, si cette relation a lieu pour m , elle a lieu pour $m + 1$, car

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{m+1}}{\partial \mathfrak{x}_i} = \frac{\partial \mathfrak{f}^m}{\partial \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{f} + \mathfrak{f}^m \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i},$$

si l'on admet la formule (3), on a

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{m+1}}{\partial \mathfrak{x}_i} = \sum_{p=0}^{m-1} \mathfrak{f}^{m-p-1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} \mathfrak{f}^p \cdot \mathfrak{f} + \mathfrak{f}^m \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i},$$

donc

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{m+1}}{\partial \mathfrak{x}_i} = \sum_{p=0}^{m-1} \mathfrak{f}^{m-p-1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} \mathfrak{f}^{p+1} + \mathfrak{f}^m \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i};$$

remplaçons p par $p' = p + 1$ et groupons le dernier terme dans la sommation, alors $m - p - 1 = m - p'$ et pour $p = m - 1$, on a $p' = m$, donc

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{m+1}}{\partial \mathfrak{x}_i} = \sum_{p'=0}^m \mathfrak{f}^{m-p'} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{f}^{p'},$$

en posant $m' = m + 1$, on obtient la formule (3).

Par induction complète, on en tire que la formule (3) est valable pour tout entier positif.

3° On a

$$(4) \quad (\mathfrak{f}^m)^{-1} = (\mathfrak{f}^{-1})^m.$$

En effet,

$$(\mathfrak{f}^m)^{-1} \cdot \mathfrak{f}^m = \mathfrak{f}^m \cdot (\mathfrak{f}^m)^{-1} = 1$$

et l'inverse de $\mathfrak{f}^m$ est unique s'il existe. D'autre part

$$(\mathfrak{f}^{-1})^m \cdot \mathfrak{f}^p = (\mathfrak{f}^{-1})^{m-1} \cdot \mathfrak{f}^{-1} \cdot \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f}^{p-1} = (\mathfrak{f}^{-1})^{m-1} \cdot \mathfrak{f}^{p-1} = \dots = (\mathfrak{f}^{-1})^{m-p}$$

et de même

$$\mathfrak{f}^p \cdot (\mathfrak{f}^{-1})^m = (\mathfrak{f}^{-1})^{m-p},$$

d'où pour $p = m$:

$$(\mathfrak{f}^{-1})^m \cdot \mathfrak{f}^m = \mathfrak{f}^m \cdot (\mathfrak{f}^{-1})^m = 1,$$

donc $(f^{-1})^m$ est l'inverse de f^m ; comme il est unique, on a bien la relation (4); nous pouvons alors poser

$$f^{-m} =_d (f^{-1})^m = (f^m)^{-1}.$$

Cherchons l'expression de la dérivée de f^{-m} . Nous pouvons la calculer à partir de $(f^{-1})^m$ ou de $(f^m)^{-1}$ en utilisant d'abord soit la formule de la dérivée de f^m soit celle de f^{-1} et utilisant l'autre ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{-m}}{\partial x_i} &= -f^{-m} \cdot \frac{\partial f^m}{\partial x_i} \cdot f^{-m} = - \sum_{p=0}^{m-1} f^{-p-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot f^{p-m}, \\ \frac{\partial f^{-m}}{\partial x_i} &= \sum_{p=0}^{m-1} (f^{-1})^{m-p-1} \cdot \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_i} \cdot (f^{-1})^p = - \sum_{p=0}^{m-1} f^{p-m} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot f^{-p-1}, \end{aligned}$$

il suffit de poser $p' = m - p - 1$ d'où $p - m = -p' - 1$ pour passer d'une formule à l'autre; ceci revient à ranger les termes dans l'ordre inverse : pour $p = 0$ on a $p' = m - 1$, pour $p = m - 1$ on a $p' = 0$. En posant $p'' = -p - 1$ d'où pour $p = 0$, on a $p'' = -1$ et pour $p = m - 1$, on a $p'' = -m$; en supprimant les accents à p'' , on peut encore mettre la dérivée de f^{-m} sous la forme

$$\frac{\partial f^{-m}}{\partial x_i} = - \sum_{p=(-m)}^{-1} f^{(-m)-p-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot f^p,$$

où les termes de la somme ont même forme que pour $m > 0$ mais où p varie sur d'autres valeurs et il y a un signe — devant $\sum$.

12. Différentielle totale d'un opérateur. — La différentielle totale d'un opérateur f appartenant à $\mathcal{E}$ est définie récursivement comme suit :

- I. $d1 = 0, \quad d0 = 0;$
- II. si $x_i \in \mathcal{E}_v$, la différentielle dx_i est univoquement définie et appartient à $\mathcal{E}_d$;
 $x_i \in \mathcal{E}_v \rightarrow dx_i \in \mathcal{E}_d;$
- III. $d(f + g) = df + dg;$
- IV. $d(f \cdot g) = f \cdot (dg) + (df) \cdot g;$
- V. si $f = g$ alors $df = dg.$

Un opérateur f de $\mathcal{E}$ sera dit *totalelement différentiable* s'il admet une différentielle totale qui se calcule par les règles précédentes et qui appartient à $\mathcal{E}$.

Des règles précédentes, en transposant les raisonnements du paragraphe 11 on obtient les règles suivantes :

$$1. \quad d\alpha = 0 \rightarrow d(\alpha.f) = \alpha.df;$$

$$2. \quad \text{si } f \text{ a un inverse } f^{-1} \text{ alors}$$

$$df^{-1} = -f^{-1}.(df).f^{-1};$$

$$3. \quad \text{pour } m \text{ entier positif, on a}$$

$$d(f^m) = \sum_{p=0}^{m-1} f^{m-p-1}.(df).f^p;$$

$$4. \quad d(f^{-m}) = - \sum_{p=0}^{m-1} f^{p-m}.(df).f^{-p-1};$$

$$5. \quad df = dg \rightarrow f - g = \alpha \quad \text{avec} \quad d\alpha = 0,$$

Car $df - dg = 0$, donc d'après 1 on a $d(f - g) = 0$ et une « constante » α est définie par $d\alpha = 0$, d'où la règle 5.

En général les différentielles $d\mathfrak{f}_i$ ne commutent pas avec les variables $\mathfrak{f}_k$ (même pour $k = i$) et les expressions précédentes ne peuvent être simplifiées. Les différentielles totales ne peuvent pas en général s'exprimer au moyen de dérivées partielles.

13. Propriétés liant dérivées partielles et différentielles totales. — Les formules définissant dérivées partielles et différentielles totales sont analogues. Ceci entraîne qu'on a la propriété suivante :

THÉORÈME 7. — *Si la différentielle totale df d'un opérateur f de $\mathcal{E}$ se met sous la forme d'une expression construite à partir d'opérateurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ et de leurs différentielles $du_1, du_2, \dots, du_p$, soit*

$$df = \chi(u_1, u_2, \dots, u_p; du_1, du_2, \dots, du_p);$$

ces $2n$ opérateurs $du_1, \dots, du_p$, appartenant à $\mathcal{E}$, alors une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{f}_i}$ de f se met sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{f}_i} = \chi\left(u_1, u_2, \dots, u_p; \frac{\partial u_1}{\partial \mathfrak{f}_i}, \frac{\partial u_2}{\partial \mathfrak{f}_i}, \dots, \frac{\partial u_p}{\partial \mathfrak{f}_i}\right)$$

obtenu en remplaçant du_1 par $\frac{\partial u_1}{\partial \mathfrak{f}_i}$ partout où du_1 apparaît dans χ , de même du_2 par $\frac{\partial u_2}{\partial \mathfrak{f}_i}$, ..., enfin du_p par $\frac{\partial u_p}{\partial \mathfrak{f}_i}$.

Si l'on désigne par $(\eta/\mathfrak{f})\chi$ la substitution de η à $\mathfrak{f}$ partout où $\mathfrak{f}$ apparaît dans χ , alors

$$df = \chi \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{f}_i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \mathfrak{f}_i}/du_1\right) \cdots \left(\frac{\partial u_p}{\partial \mathfrak{f}_i}/du_p\right) \cdot \chi.$$

Ce théorème exprime en somme la dérivée d'une fonction composée. Il se démontre par récurrence sur la construction de l'expression Φ :

1° Si $f = 1$ ou si $f = 0$, on a

$$df = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 ;$$

il n'y a pas effectivement de différentielles et l'on peut dire par extension que la règle est valable.

2° Si $f = x_k$, on a

$$df = dx_k \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ik} ;$$

cette fois $u_1 = x_k$,

$$du_1 = dx_k \quad \text{et} \quad df = \chi(du_1) = du_1,$$

on a bien

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \chi\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)$$

et la règle est valable.

3° Si $f = g + h$, alors

$$df = dg + dh = \chi(du_1, du_2),$$

en posant

$$du_1 = dg, \quad du_2 = dh \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_i} = \chi\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)$$

la règle est valable pour $g + h$ si elle est valable séparément pour g et pour h .

4° Si $f = g \cdot h$, alors

$$df = (dg) \cdot h + g \cdot (dh) = \chi(u_1, u_2; du_1, du_2),$$

en posant

$$du_1 = dg \quad \text{et} \quad du_2 = dh$$

et d'autre part

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot h + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} = \chi\left(u_1, u_2; \frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)$$

et la règle est valable pour un produit.

La règle étant valable pour chaque démarche élémentaire de construction, elle est toujours valable, ce qui établit le théorème.

Remarquons d'autre part que, en vertu du fait que $\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial \mathfrak{x}_k} = \delta_{ik}$, on a

$$d\mathfrak{x}_i = \sum_k \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial \mathfrak{x}_k} d\mathfrak{x}_k = \sum_k d\mathfrak{x}_k \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial \mathfrak{x}_k},$$

mais ceci ne se généralise pas, car si l'on a

$$d\mathfrak{f} = \chi(\mathfrak{u}_j; d\mathfrak{u}_j) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i} = \chi\left(\mathfrak{u}_j, \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial \mathfrak{x}_i}\right),$$

si l'on forme $\chi\left(\mathfrak{u}_j, \sum_i \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial \mathfrak{x}_i} d\mathfrak{x}_i\right)$, on a une expression qui n'est celle de $d\mathfrak{f}$ que si

$$d\mathfrak{u}_j = \sum_i \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial \mathfrak{x}_i} d\mathfrak{x}_i \quad \text{pour tout } j,$$

or déjà

$$d\mathfrak{x}_j^2 = \mathfrak{x}_j d\mathfrak{x}_j + d\mathfrak{x}_j \mathfrak{x}_j,$$

tandis que

$$\sum_i \frac{\partial \mathfrak{x}_j^2}{\partial \mathfrak{x}_i} d\mathfrak{x}_i = \sum_i (\mathfrak{x}_j \delta_{ji} + \delta_{ji} \mathfrak{x}_j) d\mathfrak{x}_i = 2\mathfrak{x}_j d\mathfrak{x}_j.$$

Ceci n'est égal à $d\mathfrak{x}_j^2$ qu'au cas de commutation de $\mathfrak{x}_j$ avec $d\mathfrak{x}_j$ ce qui n'est pas le cas général. Les non-commutations empêchent qu'on ait les expressions classiques.

14. **Linéarité d'une différentielle totale.** — Nous dirons qu'un élément $\mathfrak{f}$ de $\mathcal{E}$ est *fonction linéaire et homogène* de $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ si $\mathfrak{f}$ est une somme de n termes $\mathfrak{u}_n$ tels que chaque $\mathfrak{u}_p$ contienne un et un seul Φ_i sous forme $\mathfrak{u}_p = \mathfrak{a}_p \cdot \Phi_i \cdot \mathfrak{b}_p$, les $\mathfrak{a}_p$ et $\mathfrak{b}_p$ ne contenant aucun Φ_j , c'est-à-dire que $\mathfrak{f}$ est linéaire et homogène en les Φ_i si

$$\mathfrak{f} = \sum_{p=1}^n \mathfrak{a}_p \cdot \Phi_p \cdot \mathfrak{b}_p,$$

où Φ_p désigne l'un des $\Phi_1, \dots, \Phi_k$, plusieurs termes de la somme pouvant contenir le même Φ_i .

Cette définition posée, on voit qu'on a ce théorème :

THÉOREME 8. — *La différentielle totale d'un opérateur $\mathfrak{f}$ est une fonction linéaire et homogène des différentielles des variables si $d\mathfrak{f}$ n'est pas identiquement nulle.*

Ce théorème s'établit par récurrence sur la construction de $\mathbf{f}$.

1° Si $\mathbf{f} = \mathbf{1}$ ou $\mathbf{f} = \sigma$ on a $d\mathbf{f} = \sigma$, ce cas n'est pas à considérer.

2° Si $\mathbf{f} = \mathbf{x}_i$ on a $d\mathbf{f} = d\mathbf{x}_i$, ce qui est bien une fonction linéaire et homogène.

3° Si $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{h}$, on a $d\mathbf{f} = d\mathbf{g} + d\mathbf{h}$, donc si $d\mathbf{g}$ et $d\mathbf{h}$ sont des fonctions linéaires et homogènes des différentielles des variables, il en est encore de même de $d(\mathbf{g} + \mathbf{h})$.

4° Si $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}$ on a $d\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot (d\mathbf{h}) + (d\mathbf{g}) \cdot \mathbf{h}$, donc si $d\mathbf{g}$ et $d\mathbf{h}$ sont des fonctions linéaires et homogènes des différentielles des variables, il en est encore de même de $d(\mathbf{g} \cdot \mathbf{h})$ car les facteurs $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$ ne contiennent pas de différentielles.

5° Si $\mathbf{f} = \mathbf{g}^{-1}$ on a $d\mathbf{f} = -\mathbf{g}^{-1} \cdot d\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^{-1}$, donc si $d\mathbf{g}$ est une fonction linéaire et homogène des différentielles, il en est de même de $d(\mathbf{g}^{-1})$ car les facteurs $\mathbf{g}^{-1}$ ne contiennent pas de différentielles.

Le théorème étant valable dans chaque démarche élémentaire de construction d'un opérateur $\mathbf{f}$, il est toujours valable.

On peut définir la différentielle totale d'ordre p de $\mathbf{f}$ comme la différentielle de la différentielle d'ordre $p-1$, mais comme nous n'aurons pas à nous en servir, nous n'examinerons pas ici ses propriétés.

15. Cas où l'ensemble $\mathcal{E}$ est un espace abstrait. — Supposons que l'ensemble $\mathcal{E}$ ait été muni d'une topologie de telle façon qu'on puisse définir des suites convergentes d'éléments de $\mathcal{E}$. Si la suite infinie $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n, \dots$ converge vers un élément $\mathbf{f}$ de $\mathcal{E}$ et si la suite des dérivées partielles $\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_i}, \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_i}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_i}, \dots$ converge vers un élément $\mathbf{g}$ de $\mathcal{E}$, alors par définition, $\mathbf{f}$ sera dérivable partiellement par rapport à $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{g}$ sera la dérivée partielle de $\mathbf{f}$ par rapport à $\mathbf{x}_i$, soit

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_i} = {}_d \mathbf{g}.$$

De même, si la suite des différentielles totales $d\mathbf{f}_1, d\mathbf{f}_2, \dots, d\mathbf{f}_n, \dots$ converge vers un élément $\mathbf{h}$ de $\mathcal{E}$, on dira que $\mathbf{f}$ admet une différentielle totale et l'on posera par définition $d\mathbf{f} = {}_d \mathbf{h}$.

Les théorèmes 7 et 8 sont valables pour chaque terme $\mathbf{f}_n$ de la suite mais ils n'ont pas lieu en général pour l'élément limite. Tout dépend des propriétés de la fermeture.

16. **Cas où $\mathcal{E}_v$ contient des variables numériques.** — Examinons le cas où parmi les variables (c'est-à-dire parmi les éléments de $\mathcal{E}_v$) se trouvent des variables $\mathfrak{x}_i$ consistant en la multiplication par une variable numérique x_i ; dans ce cas, si $f(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction de n variables numériques $x_1, \dots, x_n$ telles que $x_{1\bullet}, \dots, x_{n\bullet}$ appartenant à $\mathcal{E}_v$, si f se construit par des règles permises dans $\mathcal{E}$ à partir de $x_1, \dots, x_n$ et de coefficients constants appartenant à $\mathcal{E}$ et commutant avec les x_i , alors $f(x_{1\bullet}, \dots, x_{n\bullet})$ est un opérateur de $\mathcal{E}$ égal à $f(x_1, \dots, x_n)\bullet$, et par récurrence sur la construction de f on vérifie que

$$\frac{\partial f\bullet}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)\bullet$$

et également que

$$d(f\bullet) = (df)\bullet = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_{i\bullet}$$

Maintenant si l'on a une fonction numérique dérivable $f(x_1, \dots, x_n)$ et si $f(x_1, \dots, x_n)\bullet$ est un élément de $\mathcal{E}$ sans que les règles de dérivation dans $\mathcal{E}$ ne permettent de définir des dérivées partielles pour $f\bullet$ ou une différentielle totale, on conviendra de poser

$$\begin{aligned} \frac{\partial f\bullet}{\partial x_i} &= {}_d \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)\bullet, \\ d(f\bullet) &= {}_d (df)\bullet = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_{i\bullet}. \end{aligned}$$

17. **Dérivée totale d'un opérateur.** — Supposons que l'ensemble $\mathcal{E}_v$ des variables de $\mathcal{E}$ contienne une variable $t\bullet$ multiplication par une variable numérique t . Nous appellerons *dérivée totale par rapport à t* d'un opérateur différentiable totalement $\mathfrak{f}$ de $\mathcal{E}$, l'opérateur obtenu en substituant $\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial t}$ à $d\mathfrak{x}_i$ et $\mathbf{1}$ à dt dans l'expression de la différentielle totale

$$\frac{d\mathfrak{f}}{dt} = {}_d \left(\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} / d\mathfrak{x}_1 \right) \dots \left(\frac{d\mathfrak{x}_n}{dt} / d\mathfrak{x}_n \right) \cdot (1/dt) \cdot d\mathfrak{f},$$

$\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n, t\bullet$ étant les éléments de $\mathcal{E}_v$.

De cette définition, et par récurrence sur la construction de $d\mathfrak{f}$, on établit ce théorème :

THEOREME 9. — Si la différentielle totale dt d'un opérateur $\mathfrak{f}$ de $\mathcal{E}$

se met sous la forme d'une expression formée à partir d'opérateurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ et de leurs différentielles $du_1, du_2, \dots, du_p$, soit

$$df = \chi(u_1, u_2, \dots, u_p; du_1, du_2, \dots, du_p)$$

ces $2n$ opérateurs appartenant à $\mathcal{E}$, alors la dérivée totale par rapport à t se met sous la forme

$$\frac{df}{dt} = \chi\left(u_1, u_2, \dots, u_p; \frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \dots, \frac{du_p}{dt}\right),$$

obtenue en remplaçant chaque différentielle du_i par la dérivée $\frac{du_i}{dt}$ partout où du_i apparaît en χ .

Ce théorème exprime en somme la dérivée d'une fonction composée. La démonstration est semblable à celle du théorème 7, on opère par récurrence sur la construction de df .

1° Si $f = 1$ ou $f = 0$, on a

$$df = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dt} = 0,$$

car les $d\mathbf{r}_i$ ne figurant pas dans df , on a

$$\frac{df}{dt} = df = 0,$$

donc la règle est valable pour $f = 1$ et $f = 0$.

2° Si $f = \mathbf{r}_k$, on a

$$df = d\mathbf{r}_k \quad \text{et} \quad \frac{df}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt},$$

cette fois $f = \chi(du)$,

$$du = d\mathbf{r}_k \quad \text{et} \quad \frac{df}{dt} = \chi\left(\frac{du}{dt}\right),$$

donc la règle est valable pour $f = \mathbf{r}_k$.

3° Si $f = \mathbf{g} + \mathbf{h}$, alors

$$df = d\mathbf{g} + d\mathbf{h} = \chi(du_1, du_2),$$

en posant

$$du_1 = d\mathbf{g} \quad \text{et} \quad du_2 = d\mathbf{h}$$

Mais on a

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\mathbf{g}}{dt} + \frac{d\mathbf{h}}{dt}$$

car en vertu de la définition d'une dérivée totale, on a remplacé chaque $d\mathbf{f}_i$ par $\frac{d\mathbf{f}_i}{dt}$ cela en $\mathbf{f}$, en $\mathbf{g}$, en $\mathbf{h}$; comme $d\mathbf{f} = d\mathbf{g} + d\mathbf{h}$, cette substitution n'altère pas l'égalité, alors

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \chi\left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}\right)$$

et la règle est valable pour $\mathbf{g} + \mathbf{h}$ si elle est valable pour $\mathbf{g}$ et pour $\mathbf{h}$.

4° Si $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}$, alors

$$d\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot (d\mathbf{h}) + (d\mathbf{g}) \cdot \mathbf{h} = \chi(u_1, u_2; du_1, du_2);$$

d'autre part la dérivée totale de $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}$ a été obtenue par substitution; dans $\mathbf{g} \cdot (d\mathbf{h})$ la substitution ne porte que sur $d\mathbf{h}$, ce qui donne $\mathbf{g} \frac{d\mathbf{h}}{dt}$, de même dans $(d\mathbf{g}) \cdot \mathbf{h}$ la substitution ne porte que sur $d\mathbf{g}$ et donnera $\frac{d\mathbf{g}}{dt} \cdot \mathbf{h}$. donc

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \chi\left(u_1, u_2; \frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}\right),$$

donc la règle est valable pour un produit.

La règle étant valable pour chaque démarche élémentaire de construction, elle est toujours valable, ce qui établit le théorème.

La dérivée totale d'ordre p d'un opérateur de $\mathcal{E}$ se définira comme la dérivée totale de sa dérivée d'ordre $p-1$, soit

$$\frac{d^p \mathbf{f}}{dt^p} = {}_d \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{p-1} \mathbf{f}}{dt^{p-1}} \right),$$

en particulier

$$\frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} = {}_d \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right).$$

On définirait d'une façon analogue les dérivées partielles d'ordre p par rapport à diverses variables.

18. Dérivée et différentielle d'un opérateur vectoriel. — Soit un opérateur vectoriel $\mathcal{V}$ appartenant à $\mathcal{S}(\partial)$ de composantes $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ par rapport au repère fondamental $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, alors on posera par définition

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}_i} &= {}_d \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{K}. \\ d\mathcal{V} &= {}_d d\mathbf{f} \cdot \mathbf{I} + d\mathbf{g} \cdot \mathbf{J} + d\mathbf{h} \cdot \mathbf{K}. \\ \frac{d\mathcal{V}}{dt} &= {}_d \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{g}}{dt} \cdot \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{h}}{dt} \cdot \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Des propriétés des dérivées et différentielles indiquées ci-dessus, on tirera sans peine les propriétés des opérateurs vectoriels. Des formules de définition précédentes on tire sans difficulté par les règles du calcul vectoriel gauche les composantes de $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}$, $d\mathbf{v}$, $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ sur un système de base quelconque. Les vecteurs $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ du repère fondamental sont considérés comme des constantes et ont tous leurs dérivées et différentielles nulles.

Des propriétés des dérivées et différentielles (d'une somme, d'un produit, d'une constante) et des définitions précédentes, il résulte immédiatement qu'on a pour l'addition vectorielle :

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_i}, \\ d(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= d\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2, \\ \frac{d(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_2}{dt};\end{aligned}$$

pour la multiplication par un scalaire f :

$$\begin{aligned}\frac{\partial (f \cdot \mathbf{v})}{\partial x_i} &= f \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \mathbf{v}, & \frac{\partial \mathbf{v} \cdot f}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \cdot f + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}; \\ d(f \cdot \mathbf{v}) &= f \cdot d\mathbf{v} + (df) \cdot \mathbf{v}, & d(\mathbf{v} \cdot f) &= (d\mathbf{v}) \cdot f + \mathbf{v} \cdot df; \\ \frac{d(f \cdot \mathbf{v})}{dt} &= f \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{df}{dt} \cdot \mathbf{v}, & \frac{d(\mathbf{v} \cdot f)}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot f + \mathbf{v} \cdot \frac{df}{dt};\end{aligned}$$

pour le produit scalaire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{\partial x_i} &= \left(\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_i} \cdot \mathbf{v}_2 \right), \\ d(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{v}_1 \cdot [d\mathbf{v}_2]) + ([d\mathbf{v}_1] \cdot \mathbf{v}_2), \\ \frac{d(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{dt} &= \left(\mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \right) + \left(\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{v}_2 \right),\end{aligned}$$

et enfin pour le produit vectoriel, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)}{\partial x_i} &= \left(\mathbf{v}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_i} \wedge \mathbf{v}_2 \right), \\ d(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 \wedge (d\mathbf{v}_2) + (d\mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2, \\ \frac{d(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)}{dt} &= \mathbf{v}_1 \wedge \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \wedge \mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

La dérivée totale d'ordre p d'un opérateur vectoriel se définira comme la dérivée totale d'ordre $p-1$, soit

$$\frac{d^p \mathbf{v}}{dt^p} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{p-1} \mathbf{v}}{dt^{p-1}} \right),$$

en particulier la dérivée d'ordre 2 sera définie par

$$\frac{d^2 \mathfrak{V}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathfrak{V}}{dt} \right).$$

On vérifierait aisément par récurrence que les composantes de $\frac{d^p \mathfrak{V}}{dt^p}$ sur le trièdre T_0 sont les dérivées d'ordre p des composantes de $\mathfrak{V}$.

On définirait de même la différentielle d'ordre p et les dérivées partielles d'ordre p par rapport à diverses variables.

19. **Système d'équations différentielles** (¹). — Soit un système d'équations de la forme

[illegible]

où les $\mathbf{f}_i$ appartiennent à $\mathcal{E}_v$ et où les $\mathbf{f}_j$ sont des opérateurs de $\mathcal{E}$ (les $\mathbf{f}_j$ sont des expressions formées à partir des $\mathbf{f}_j$) et où les dérivées sont des dérivées totales symboliques au sens qui a été défini ci-dessus. Un tel système d'équations sera appelé *système d'équations différentielles opératorielles d'ordre n* , s'il y a n équations et n variables.

On appellera *intégrale dépendant de p constantes* du système (5) une expression

$$q(x_1, \dots, x_n; t; a_1, \dots, a_p) \equiv 0,$$

formée à partir des opérateurs $\mathfrak{r}_i$ et de p opérateurs constants $\mathfrak{a}_j$ (c'est-à-dire tels que $\frac{d\mathfrak{a}_j}{dt} = 0$).

On appelle *intégrale première* une intégrale dépendant d'une seule constante. Si l'on peut résoudre par rapport à la constante, elle prendra la forme

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n; t) = a.$$

Soit une intégrale dépendant de p constantes. Nous dirons qu'elle

(¹) F. DESTOUCHES-AESCHLIMANN, *Intégrales opératoriellles et extension de la Mécanique ondulatoire* (C. R. Acad. Sc., t. 236, 1953, p. 1148).

dépend de p constantes distinctes si aucune de ces p constantes n'est égale à une fonction des autres, c'est-à-dire qu'on n'a pas

$$a_j = h(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_p)$$

quel que soit p .

Des intégrales premières $g_1 = a_1, g_2 = a_2, \dots, g_k = a_k$ seront dites *distinctes* s'il n'existe aucune relation de la forme

$$h(g_1, g_2, \dots, g_k, t) = 0$$

entre les g_i .

Nous allons montrer que sous certaines hypothèses on peut tirer d'une intégrale dépendant de p constantes, p intégrales premières distinctes.

Supposons que $g = \sigma$, dépendant de p constantes distinctes soit résoluble par rapport à une des constantes (en général on ne pourra pas résoudre une équation entre opérateurs); désignons par a_p cette constante, on a

$$a_p = \Psi(t; x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_{p-1}).$$

Dérivons totalement Ψ par rapport à t , alors

$$0 = \frac{d\Psi}{dt}.$$

Cette dérivée est une fonction linéaire et homogène des $\frac{dx_i}{dt}$ d'après le théorème 8. Or d'après (5), $\frac{dx_i}{dt} = f_i$, d'où si l'on pose

$$\frac{d\Psi}{dt} = \chi\left(x_1, \dots, x_n; \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}; t; a_1, \dots, a_{p-1}\right)$$

on a

$$0 = \chi(x_1, \dots, x_n; f_1, \dots, f_n; t; a_1, \dots, a_{p-1}),$$

alors χ est une intégrale de (5) puisqu'elle est constamment nulle en vertu de (5) et χ dépend de $p-1$ constantes car si une constante, soit a_{p-1} n'y figurait pas, $\chi = 0$ aurait lieu avec des valeurs arbitraires de a_{p-1} ; on aurait en remontant à la primitive, $a_p = \Psi$ pour a_{p-1} arbitraire, et des constantes a_i ne seraient pas distinctes contrairement à l'hypothèse. On raisonne alors sur $\chi = 0$ comme on l'a fait sur $g = \sigma$, et ainsi de suite. A chaque fois, on a une constante de moins. Finalement on arrive à une relation (à condition de pouvoir résoudre chaque fois),

$$a_1 = g_1(x_1, \dots, x_n; t)$$

qui est une intégrale première. On porte cette valeur de α_1 dans l'intégrale précédente, on résoud par rapport à α_2 , on a alors une seconde intégrale première et ainsi de suite, d'où ce théorème :

THÉOREME 10. — *D'une intégrale dépendant de p constantes distinctes, on tire n intégrales premières distinctes dans le cas où l'on peut résoudre par rapport aux constantes.*

La méthode précédente appliquée à une relation quelconque

$$g(t; x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_p) = 0$$

permet de reconnaître : 1° si cette relation est une intégrale; 2° de combien de constantes distinctes elle dépend, pourvu qu'on puisse résoudre par rapport aux constantes.

On voit alors que le problème le plus simple qu'on puisse se poser concernant un système d'équations différentielles symboliques (5) (problème qui a le plus de chance d'être résolu) est donc la recherche d'intégrales premières.

20. Propriétés des intégrales premières. — Si l'on connaît $p = n - k$ intégrales premières du système (5), de ces intégrales on peut tirer p des variables convenablement choisies en fonction des k autres et de t , à condition qu'on puisse résoudre. En effet la première intégrale renferme au moins une des variables x_i , soit x_1 (sinon $t = \text{Cte}$ serait intégrale première); résolvons si cela est possible par rapport à x_1 et remplaçons la valeur x_1 ainsi obtenue dans les $(p - 1)$ autres intégrales; puisqu'elles sont supposées distinctes, les seconds membres des nouvelles intégrales

$$\alpha_2 = g_2(a_1; t; x_2, \dots, x_n)$$

ne se réduisent pas à des fonctions de α_1 et g_2 renferme au moins une des variables $x_2, \dots, x_n$, soit x_2 . Supposons qu'on puisse résoudre par rapport à x_2 ; tirons x_2 de la seconde intégrale et portons la valeur obtenue dans les suivantes. Au bout de $p - 1$ opérations analogues, nous formons l'expression de x_{n-k} en fonction de $x_{n-k+1}, \dots, x_n, t$ et des constantes. Si l'on revient en arrière, on voit que $x_{n-k-1}, \dots, x_1$ sont exprimables en fonction des mêmes quantités.

Si nous remplaçons $x_1, x_2, \dots, x_p$ par ces valeurs dans les k dernières équations (5) nous n'avons plus à considérer qu'un système

de k équations du premier ordre entre $k+1$ variables, d'où ce théorème :

THÉOREME 11. — *Si l'on connaît p intégrales distinctes du système différentiel (5), si l'on peut résoudre, on peut tirer de ces intégrales p des variables convenablement choisies en fonction des $k=n-p$ autres variables et de t . Le système (5) est alors ramené à un système différentiel à k équations du premier ordre entre $k+1$ variables.*

21. Recherche des intégrales premières. — La recherche d'une intégrale première est le problème le plus simple d'intégration. Une condition simple permet de caractériser une telle intégrale, tandis que pour reconnaître si $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ dépendant de plusieurs constantes est une intégrale, il faut éliminer les constantes dans chaque cas particulier.

Soit

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

une intégrale première. Alors on a $\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \mathbf{0}$ qui doit être une conséquence des relations (5); donc si $\mathbf{g} = \mathbf{a}$ est intégrale première, alors $\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \mathbf{0}$; réciproquement si $\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{g} = \mathbf{a}$ sera intégrale première.

Mais $d\mathbf{g}$, d'où l'on déduit $\frac{d\mathbf{g}}{dt}$, est une fonction linéaire et homogène des différentielles des variables $\mathbf{x}_i$ et t en vertu du théorème 8, donc

$$d\mathbf{g} = \chi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t; d\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_n; dt),$$

où χ est linéaire et homogène par rapport à l'ensemble des $d\mathbf{x}_i$ et dt .

De là on tire que $\frac{d\mathbf{g}}{dt}$ est de la forme

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \chi\left(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t; \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}, \dots, \frac{d\mathbf{x}_n}{dt}; 1\right).$$

Ceci peut s'écrire encore comme la somme d'une fonction χ_1 linéaire et homogène par rapport aux $\mathbf{x}_i$ obtenue en conservant dans χ les termes contenant les $\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$ et d'une fonction χ_2 obtenue à partir du terme en dt dans l'expression de $d\mathbf{g}$, soit

$d\mathbf{g} = \chi(\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_n; dt) = \chi_1(\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_n) + \chi_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t; dt)$;
d'où

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \chi_1\left(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t; \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}, \dots, \frac{d\mathbf{x}_n}{dt}\right) + \chi_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t; 1).$$

D'après le théorème 7 la dérivée partielle d'un élément f de $\mathcal{E}$ par rapport à une variable η s'obtient à partir de sa différentielle totale en substituant pour toute variable $\mathfrak{x}_i$ la dérivée $\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial \eta}$ à $d\mathfrak{x}_i$ et $\frac{\partial t}{\partial \eta}$ à t . Considérons alors la dérivée par rapport à t , c'est-à-dire posons $\eta = t$, alors comme les $\mathfrak{x}_i$ et t appartiennent à $\mathcal{E}_0$ par hypothèse, on a

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial t}{\partial t} = 1.$$

donc

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \chi_1(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n; t; 0, \dots, 0) + \Phi_2(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n; t; 1).$$

Mais χ_1 est une fonction linéaire et homogène, on aura donc une somme de termes de la forme $\alpha.0.b$, or $0.t = f.0 = 0$ par hypothèse sur $\mathcal{E}$, donc χ_1 est nul ici et l'on a

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \chi_2(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n; t; 1)$$

et par suite

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \chi_1\left(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n; t; \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}, \dots, \frac{d\mathfrak{x}_n}{dt}\right).$$

Si l'on tient compte des relations (5), on peut remplacer chaque dérivée $\frac{d\mathfrak{x}_i}{dt}$ par la fonction $\mathfrak{f}_i$ à laquelle elle est égale, donc

$$(6) \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \chi_1(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n; t; \mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_n) = 0.$$

Cette relation est donc vérifiée par toute intégrale première.

Inversement toute solution g de cette équation définit une intégrale première du système (5). En effet, si g_1 est une solution de (6), nous pouvons en calculer la dérivée totale par rapport à t :

$$\frac{dg_1}{dt} = \frac{\partial g_1}{\partial t} + \chi_1\left(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n; t; \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}, \dots, \frac{d\mathfrak{x}_n}{dt}\right),$$

mais $\frac{d\mathfrak{x}_i}{dt} = \mathfrak{f}_i$ en vertu de (5) et l'équation (6) s'obtient en substituant les $\mathfrak{f}_i$ aux $\frac{d\mathfrak{x}_i}{dt}$ dans la relation précédente. or comme g_1 est supposée solution de (6), on a $\frac{dg_1}{dt} = 0$ et par suite $g_1 = \alpha$ (où α est une constante, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{E}$ tel que $d\alpha = 0$) est une intégrale première

d'après ce qui a été dit au début de ce paragraphe. On arrive ainsi à ce théorème :

THÉORÈME 12. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{g} = \alpha$ soit une intégrale première du système d'équations différentielles symboliques (5) est que $\mathfrak{g}$ soit une solution de l'équation*

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} + \chi_1(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n; t; \mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_n) = 0.$$

Cette équation est appelée *équation aux intégrales premières*.

Si toutes les variables se réduisaient à des multiplications par des variables numériques et les constantes à des multiplications par des nombres constants, on retrouverait l'équation aux intégrales premières de l'analyse des fonctions de variables numériques. En effet, toutes les commutations auraient lieu et $\chi_1\left(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n; t; \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}, \dots, \frac{d\mathfrak{x}_n}{dt}\right)$ se réduirait à $\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$ d'où l'équation classique

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_i \mathfrak{f}_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0.$$

Nous ne développerons pas davantage ces considérations et nous les appliquerons maintenant à la Mécanique ondulatoire.

CHAPITRE III

ASPECTS OPÉRATORIELS DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

1. Système de corpuscules. — La méthode opératorielle va nous permettre de décrire en Mécanique ondulatoire ce qui subsiste de la structure de la Mécanique classique et ainsi de rapprocher ces deux mécaniques. Pour mieux faire apparaître ce rapprochement, nous suivrons un exposé analogue à celui de la première partie de cette thèse.

Nous admettrons que l'espace physique est un espace euclidien (R_3), le même quel que soit l'observateur considéré. Nous admettrons qu'il existe un temps universel, le même pour tous les observateurs et tous les phénomènes observés, et par suite le même qu'en Mécanique classique.

En Microphysique on étudie le mouvement de certaines parties de l'univers indépendamment du reste de l'univers. Une telle partie est appelée *système mécanique* ou *système physique matériel*. On est conduit tout d'abord à chercher une représentation géométrique de chacun des systèmes étudiés. Cette schématisation géométrique devra ensuite être complétée par une schématisation des propriétés mécaniques.

L'expérience montre que les systèmes microphysiques sont formés de particules insécables. Au point de vue géométrique, chaque particule insécable relativement à certains processus de morcellement peut être représentée par un point conformément à la définition d'Euclide « Le point est ce qui n'a pas de partie », mais cette représentation géométrique exige un prolongement de l'espace euclidien comme nous l'avons vu plus haut et les processus de mesure doivent jouer un rôle essentiel. Ceci conduit à admettre les principes suivants :

POSTULAT I : PRINCIPE DE L'ATOMISME. — *Tout système mécanique observable S est morcelable (relativement à certains procédés de morcellement $\mathcal{M}$) en un nombre fini et déterminé de parties.*

On appelle *corpuscule* relativement à des procédés de morcellement $\mathcal{M}$, toute partie insécable d'un système observable S relativement à ces procédés $\mathcal{M}$.

On appellera *corpuscule élémentaire* une partie insécable d'un système observable S relativement à tout procédé de morcellement.

Dans une théorie microphysique non relativiste, on ne peut atteindre qu'un atomisme relatif, car on ne peut prouver qu'un corpuscule défini relativement à des procédés de morcellement $\mathcal{M}$ sera insécable par rapport à tout procédé de morcellement possible. Par contre, dans une théorie des corpuscules construite dans le cadre de la Relativité restreinte, on peut atteindre des corpuscules insécables par rapport à tout procédé de morcellement, donc des corpuscules élémentaires, mais ceci n'a pas lieu en théorie non relativiste, notamment à cause des théorèmes sur le centre de gravité qui font qu'un centre de gravité possède les mêmes propriétés qu'un corpuscule. Nous devons donc nous limiter ici à un atomisme relatif.

2. Représentation géométrique des corpuscules. — Le minimum qu'on puisse demander à une théorie physique est de permettre le calcul de prévisions. On peut donc lui appliquer la théorie générale des prévisions. Pour une théorie microphysique, toute connaissance acquise sur le système observé exige l'intervention d'un appareil de mesure qui est inéliminable de la description théorique. Ceci a pour conséquence qu'il y a des grandeurs non simultanément mesurables, que le formalisme de la théorie générale des prévisions ne peut être réduit, et qu'à chaque grandeur mesurable correspond un opérateur linéaire d'un certain espace abstrait ($\mathcal{Y}$). Nous avons vu au début du chapitre précédent comment faire correspondre à chaque grandeur de la Mécanique classique un opérateur.

Un corpuscule insécable par rapport à certains procédés de morcellement $\mathcal{M}$ doit être représenté par un point; les coordonnées d'un tel point par rapport au repère fondamental T_0 seront des grandeurs physiques (au moins au sens élargi). Soient $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ ces coordonnées; ce sont des opérateurs. Nous les considérerons comme des variables d'un δ -anneau. Ces opérateurs ne sont pas des coordonnées d'un point de l'espace euclidien (R_3) mais du prolongement ($R_3(\mathbf{X})$) de cet espace tel que nous l'avons défini au début du chapitre II et seront considérés comme des variables libres. Tout ceci conduit donc à admettre le postulat suivant :

POSTULAT II : PRINCIPE QUANTIQUE DE LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE.

Tout corpuscule d'un système observable S est représentable géométriquement dans le prolongement ($R_3(\mathbf{X})_S$) de l'espace euclidien (R_3)

par un point dont les coordonnées sont des opérateurs variables libres d'un δ -anneau quand on rapporte le mouvement à un repère T_0 dit fondamental.

L'ensemble $(R_3(\mathfrak{X})_S)$ est formé par l'ensemble $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}, \mathfrak{Z})$ des triples engendrés par le corps $\mathcal{K}$ des nombres réels et les $3n$ variables libres $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{Z}_2, \dots, \mathfrak{X}_n, \mathfrak{U}_n, \mathfrak{Z}_n$ opérateurs coordonnées des n corpuscules du système relativement au repère T_0 .

Il n'est pas nécessaire de supposer que les $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{U}_i, \mathfrak{Z}_i$ sont des opérateurs multiplication par des variables numériques parcourant l'ensemble des nombres réels. Pour le moment, il suffit de supposer que ce sont des variables libres opératorielles. Mais pour ne pas compliquer inutilement l'exposé, nous supposerons comme au chapitre précédent que ces opérateurs commutent entre eux. Nous admettrons donc le postulat déjà énoncé au chapitre II :

POSTULAT III. — *Tous les opérateurs coordonnées dans le mouvement rapporté au repère fondamental T_0 commutent entre eux.*

Ce postulat a pour conséquence immédiate que si l'on rapporte le mouvement d'un système de corpuscules non plus au repère fondamental T_0 mais à un repère commutatif quelconque T ou à un repère non commutatif holonome, les opérateurs coordonnées des corpuscules d'un système observable S quelconque commutent entre eux. (Cette propriété ne subsiste pas si l'on rapporte le mouvement du système à un repère non commutatif non holonome comme on peut le vérifier aisément.)

3. Le postulat de la Cinématique. — D'après le chapitre I de cette partie, on voit que la structure de continuité des mouvements de la Mécanique classique se maintient affaiblie en Mécanique ondulatoire ; l'affaiblissement, toujours d'après les résultats du chapitre I sera lié au remplacement des quantités mécaniques par des opérateurs. Nous avons un système $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$, extension du système vectoriel classique $\mathcal{S}$, prolongé ensuite par le système $\mathcal{S}(d)$ contenant les opérateurs des différentes grandeurs. Ce système contient un ensemble de variables $\mathcal{E}_i$, les opérateurs coordonnées des corpuscules du système observable S considéré. Il contient aussi des opérateurs vitesses et accélérations, puisqu'au chapitre I nous avons précisé comment associer un opérateur à chaque grandeur de la Mécanique classique. Nous pouvons alors convenir qu'un opérateur vitesse est égal à la dérivée totale symbolique par rapport au

temps d'une coordonnée. De même l'accélération peut être définie comme la dérivée totale par rapport au temps de la vitesse. Ceci est possible car, dans la définition d'un ∂ -anneau, les dérivées des variables sont laissées arbitraires. On peut poser :

1° l'ensemble $\mathcal{E}_v$ des variables est constitué par l'ensemble des opérateurs coordonnés et composantes des vitesses des corpuscules du système S par rapport au repère fondamental, et par la variable temporelle t ;

2° le ∂ -anneau $\mathcal{E}$ est formé par les opérateurs de $\mathcal{K}(\partial)$ et il induit le système vectoriel $\mathcal{S}(\partial)$;

3° l'ensemble $\mathcal{E}_{dv}$ des dérivées totales par rapport au temps des variables est formé par l'ensemble des composantes des vitesses et des accélérations des corpuscules du système S;

4° aux dérivées totales des variables, on peut convenir d'associer biunivoquement des différentielles totales par la condition suivante : la différentielle d'une variable $\mathfrak{x}_i$ est le produit de sa dérivée totale par rapport au temps multipliée par la différentielle dt (définie au sens usuel de l'analyse) de la variable temporelle (numérique) t . Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{x}_i}{dt} &= {}_d\mathfrak{v}_{x_i} & d\mathfrak{x}_i &= {}_d\mathfrak{v}_{x_i} \cdot dt = dt \cdot \mathfrak{v}_{x_i}, \\ \frac{d\mathfrak{v}_{x_i}}{dt} &= {}_d\Gamma_{x_i} & d\mathfrak{v}_{x_i} &= {}_d\Gamma_{x_i} dt;\end{aligned}$$

où les $\mathfrak{x}_i$, les $\mathfrak{v}_{x_i}$, les Γ_{x_i} sont les opérateurs associés aux coordonnées, composantes des vitesses, accélérations, en vertu de la théorie générale des prévisions qui associe à toute grandeur un opérateur, et de la persistance des structures formelles qui conduit à maintenir des relations de dérivation entre coordonnées, vitesses, accélérations. Ainsi se trouve défini un ∂ -anneau et assurée la dérivabilité des coordonnées et des vitesses des corpuscules.

Maintenant si l'on veut constituer une théorie autonome fondée sur des principes de même forme que ceux de la Mécanique classique, et ne pas faire intervenir explicitement la théorie générale des prévisions et la persistance des structures formelles, il faut accepter un principe de Cinématique ayant même forme que celui de la Mécanique classique (il est justifié par la condition de persistance des structures formelles). Nous posons donc :

POSTULAT IV : PRINCIPE DE LA CINÉMATIQUE. — *Il existe au moins une échelle de temps $[\tau]$ et un repère T tels que les coordonnées de tout*

corpuscule par rapport à ce repère T soient des opérateurs deux fois dérivables symboliquement (au sens d'un ∂ -anneau) par rapport à la variable temporelle $[\tau]$.

Les échelles de temps satisfaisant à ce postulat seront les échelles de temps cinématique de la Mécanique classique comme on peut le voir par correspondance en montrant qu'elles donnent les mêmes échelles $[\tau]$ si l'on remplace les opérateurs et dérivées symboliques par des quantités numériques et des dérivées usuelles.

4. La composition des mouvements. — En utilisant la dérivée symbolique au sens où nous l'avons définie au chapitre précédent, nous pouvons obtenir les théorèmes de composition des vitesses et accélérations ⁽¹⁾.

Soit T_1 un repère commutatif orthonormé de vecteurs de base $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ et T un autre repère orthonormé quelconque de vecteurs de base $\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$, soit M un corpuscule. Alors

$$\overrightarrow{OM} = \mathfrak{x}\mathbf{I} + \mathfrak{y}\mathbf{J} + \mathfrak{z}\mathbf{K} = \overrightarrow{O_1}\hat{O} + \mathfrak{x}_d\mathcal{J} + \mathfrak{y}_d\mathcal{J} + \mathfrak{z}_d\mathcal{K} = \overrightarrow{O_1}\hat{O} + \mathcal{J}\mathfrak{x}_g + \mathcal{J}\mathfrak{y}_g + \mathcal{K}\mathfrak{z}_g.$$

La distinction entre composantes droites et gauches $\mathfrak{x}_d, \mathfrak{x}_g$ est faite dès les coordonnées pour le cas où le repère T serait non commutatif non holonome. Dans le cas d'un repère non commutatif, holonome on a $\mathfrak{x}_g = \mathfrak{x}_d, \mathfrak{y}_g = \mathfrak{y}_d, \mathfrak{z}_g = \mathfrak{z}_d$ pour des coordonnées.

Dérivons cette relation pour obtenir la relation entre les vitesses :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau} \right] &= \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau}\mathcal{J} + \frac{d\mathfrak{y}}{d\tau}\mathcal{J} + \frac{d\mathfrak{z}}{d\tau}\mathcal{K} \\ &= \frac{d\overrightarrow{O_1}\hat{O}}{d\tau} + \mathfrak{x}_d \frac{d\mathcal{J}}{d\tau} + \mathfrak{y}_d \frac{d\mathcal{J}}{d\tau} + \mathfrak{z}_d \frac{d\mathcal{K}}{d\tau} + \frac{d\mathfrak{x}_d}{d\tau}\mathcal{J} + \frac{d\mathfrak{y}_d}{d\tau}\mathcal{J} + \frac{d\mathfrak{z}_d}{d\tau}\mathcal{K} \\ &= \frac{d\overrightarrow{O_1}\hat{O}}{d\tau} + \frac{d\mathcal{J}}{d\tau}\mathfrak{x}_g + \frac{d\mathcal{J}}{d\tau}\mathfrak{y}_g + \frac{d\mathcal{K}}{d\tau}\mathfrak{z}_g + \mathcal{J}\frac{d\mathfrak{x}_d}{d\tau} + \mathcal{J}\frac{d\mathfrak{y}_d}{d\tau} + \mathcal{K}\frac{d\mathfrak{z}_d}{d\tau}. \end{aligned}$$

Posons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n =_d \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{d\tau} \right]_{/T_1}; \quad \mathbf{v}_{e,d} =_d \left[\frac{d\overrightarrow{O_1}\hat{O}}{d\tau} \right]_{/T_1} + \mathfrak{x}_d \left[\frac{d\mathcal{J}}{d\tau} \right]_{/T_1} + \mathfrak{y}_d \left[\frac{d\mathcal{J}}{d\tau} \right]_{/T_1} + \mathfrak{z}_d \left[\frac{d\mathcal{K}}{d\tau} \right]_{/T_1}; \\ \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau} \right]_{/T,d} =_d \mathbf{v}_{r,d} =_d \frac{d\mathfrak{x}_d}{d\tau}\mathcal{J} + \frac{d\mathfrak{y}_d}{d\tau}\mathcal{J} + \frac{d\mathfrak{z}_d}{d\tau}\mathcal{K}; \\ \mathbf{v}_{e,g} =_d \frac{d\overrightarrow{O_1}\hat{O}}{d\tau} + \left[\frac{d\mathcal{J}}{d\tau} \right]_{/T_1}\mathfrak{x}_g + \left[\frac{d\mathcal{J}}{d\tau} \right]_{/T_1}\mathfrak{y}_g + \left[\frac{d\mathcal{K}}{d\tau} \right]_{/T_1}\mathfrak{z}_g; \\ \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau} \right]_{/T,g} =_d \mathbf{v}_{r,g} =_d \mathcal{J}\frac{d\mathfrak{x}_g}{d\tau} + \mathcal{J}\frac{d\mathfrak{y}_g}{d\tau} + \mathcal{K}\frac{d\mathfrak{z}_g}{d\tau}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ F. AESCHLIMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 354.

On voit qu'on a

$$\mathfrak{V}_a = \mathfrak{V}_{e,d} + \mathfrak{V}_{r,d} = \mathfrak{V}_{e,g} + \mathfrak{V}_{r,g}.$$

Mais il faut remarquer que $\mathfrak{V}_{e,d}$ et $\mathfrak{V}_{e,g}$ sont deux vecteurs distincts et pas des composantes droites ou gauches du même vecteur et qu'on n'a pas les composantes (droites ou gauches) de ces vecteurs par les formules de définition. De même $\mathfrak{V}_{r,d}$ et $\mathfrak{V}_{r,g}$ sont deux vecteurs distincts et non pas des composantes droites ou gauches d'un même vecteur. On appelle $\mathfrak{V}_a$ l'opérateur *vitesse* du corpuscule représenté par le point M relativement au trièdre T_1 et $\mathfrak{V}_{e,d}$ *vitesse d'entraînement droite* du corpuscule relativement à la paire T_1, T de trièdres, de même $\mathfrak{V}_{e,g}$ est la *vitesse d'entraînement gauche* relativement à la paire T_1, T de trièdres. $\mathfrak{V}_{r,d}$ est la *vitesse relative droite* du corpuscule, $\mathfrak{V}_{r,g}$ est la vitesse relative gauche relativement au trièdre T. Si les trièdres T_1 et T sont tous deux commutatifs, il n'y a pas à distinguer entre vitesses droites et gauches. Mais par rapport à un repère non commutatif, il faut toujours distinguer entre la vitesse droite et la vitesse gauche, il y a deux vecteurs distincts et non pas seulement des composantes droites et gauches d'un vecteur.

On arrive ainsi au théorème de composition des vitesses :

THÉORÈME 1. — *La vitesse d'un corpuscule M par rapport à un repère commutatif T_1 peut être exprimée de deux façons différentes :*

1° *La vitesse de M relativement à T_1 est la somme de la vitesse relative droite de M par rapport au trièdre T en mouvement quantique par rapport à T_1 et de la vitesse d'entraînement droite de T dans son mouvement par rapport à T_1 .*

2° *La vitesse de M relativement à T_1 est la somme de la vitesse relative gauche de M par rapport au trièdre T en mouvement quantique par rapport à T_1 et de la vitesse d'entraînement gauche de T dans son mouvement par rapport à T_1 .*

Ces deux énoncés se résument dans les formules

$$\mathfrak{V}_a = \mathfrak{V}_{r,d} + \mathfrak{V}_{e,d} = \mathfrak{V}_{r,g} + \mathfrak{V}_{e,g}$$

§. Dérivées des vecteurs de base d'un trièdre. — Dans ce qui précède, les dérivées $\left[\frac{d\mathcal{I}}{d\tau}\right]_{/T_1}$, $\left[\frac{d\mathcal{J}}{d\tau}\right]_{/T_1}$, $\left[\frac{d\mathcal{K}}{d\tau}\right]_{/T_1}$ des vecteurs de base du trièdre T relativement au trièdre T_1 sont apparues. Cherchons leurs composantes. Désignons par $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ les vecteurs $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ et par $\mathbf{E}_1,$

$\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$, les vecteurs $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, désignons les dérivées en primant et posons

$$\mathcal{E}_i = \alpha_i^j \mathbf{E}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_j = \beta_{di}^k \mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k \beta_{gk}^j$$

avec la convention de sommation d'Einstein. Alors

$$\mathcal{E}_i' = \frac{dx_i^j}{d\tau} \mathbf{E}_j.$$

d'où les expressions des dérivées des $\mathcal{E}_i$ sur un repère commutatif (en particulier trièdre fondamental). Sur les axes mobiles, axes relatifs au trièdre T , on aura par définition

$$\mathcal{E}_i' = w_{di}^j \mathcal{E}_j = \mathcal{E}_j \cdot w_{zj}^i.$$

En comparant les deux expressions des dérivées, on voit que

$$w_{di}^k = \frac{dx_i^j}{d\tau} \beta_{dj}^k, \quad w_{zj}^i = \beta_{zj}^k \frac{dx_i^j}{d\tau}.$$

Séparons les parties symétriques et antisymétriques, en posant

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{di}^j &= \frac{1}{2} (w_{di}^j - w_{dj}^i), & \mathbf{A}_{zj}^i &= \frac{1}{2} (w_{zj}^i - w_{zi}^j), \\ \mathbf{B}_{di}^j &= \frac{1}{2} (w_{di}^j + w_{dj}^i), & \mathbf{B}_{zj}^i &= \frac{1}{2} (w_{zj}^i + w_{zi}^j), \end{aligned}$$

alors avec ces notations, on a

$$\mathcal{E}_i' = \mathbf{A}_{di}^j \mathcal{E}_j + \mathbf{B}_{di}^j \mathcal{E}_j = \mathcal{E}_j \mathbf{A}_{zj}^i + \mathcal{E}_j \mathbf{B}_{zj}^i$$

en remarquant que $\mathbf{A}_{di}^i = \mathbf{A}_{gi}^i = 0$. Posons

$$\begin{aligned} p_d &= \mathbf{A}_{d2}^2 = -\mathbf{A}_{d3}^3, & p_z &= \mathbf{A}_{z2}^2 = -\mathbf{A}_{z3}^3, \\ q_d &= \mathbf{A}_{d1}^1 = -\mathbf{A}_{d2}^2, & q_z &= \mathbf{A}_{z1}^1 = -\mathbf{A}_{z2}^2, \\ r_d &= \mathbf{A}_{d1}^1 = -\mathbf{A}_{d2}^2, & r_z &= \mathbf{A}_{z1}^1 = -\mathbf{A}_{z2}^2. \end{aligned}$$

d'où encore

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{I}' = \mathcal{E}_1' = r_d \mathcal{E}_2 - q_d \mathcal{E}_3 + \mathbf{B}_{d1}^1 \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3 q_z - \mathcal{E}_2 r_z + \mathcal{E}_1 \mathbf{B}_{z1}^1, \\ \mathcal{J}' = \mathcal{E}_2' = p_d \mathcal{E}_3 - r_d \mathcal{E}_1 + \mathbf{B}_{d2}^2 \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 r_z - \mathcal{E}_3 p_z + \mathcal{E}_2 \mathbf{B}_{z2}^2, \\ \mathcal{K}' = \mathcal{E}_3' = q_d \mathcal{E}_1 - p_d \mathcal{E}_2 + \mathbf{B}_{d3}^3 \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2 p_z - \mathcal{E}_1 q_z + \mathcal{E}_3 \mathbf{B}_{z3}^3. \end{cases}$$

Les $\mathbf{W}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ ne constituent pas des composantes de tenseurs comme l'a établi M^{me} Viard ⁽¹⁾ et sont liés à deux repères T_1 et T ; on le vérifie facilement en considérant un changement de base. Les quantités p, q, r

⁽¹⁾ J. VIARD, *Recherches sur la Mécanique ondulatoire non relativiste des systèmes* (Thèse, Paris, 1948; *Collectanea Mathematica Barcelona*, vol. II, fasc. 1 et 2, 1949).

(droites ou gauches) ne se transforment pas comme un vecteur dans un changement de base. Cependant sur la base des $\mathcal{E}_i$ on peut définir des vecteurs $\mathbf{\Omega}_d$ et $\mathbf{\Omega}_i$ en posant

$$\mathbf{\Omega}_d = {}_d p_d \mathcal{J} + q_d \mathcal{I} + r_d \mathcal{K}, \quad \mathbf{\Omega}_g = {}_d \mathcal{J} p_d + \mathcal{I} q_d + \mathcal{K} r_d$$

qu'on peut appeler *vecteur rotation droite* et *vecteur rotation gauche* de T par rapport à T_1 . De même aux quantités $\mathfrak{B}$ on peut associer un tenseur ayant comme composantes les $\mathfrak{B}_d$ et un tenseur ayant pour composantes les $\mathfrak{B}_i$ dans le système de base de $\mathcal{E}_i$ qu'on appelle *tenseurs de déformation quantique*.

Si les vecteurs de base $\mathcal{E}_i$ sont orthonormés, on a

$$\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j = \delta_{ij},$$

d'où en dérivant

$$\mathcal{E}'_i \cdot \mathcal{E}_j + \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}'_j = 0$$

et en remplaçant les $\mathcal{E}'$ par leurs composantes

$$w_{di}^k \cdot \mathcal{E}_k \cdot \mathcal{E}_j + \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_k \cdot w_{gj}^k = 0.$$

Comme le repère est orthonormé, on a

$$w_{di}^k \delta_{kj} + \delta_{ik} w_{gj}^k = 0,$$

d'où

$$w_{di}^j + w_{gj}^i = 0,$$

par suite

$$\mathfrak{A}_{dj}^i = \mathfrak{A}_{gi}^j, \quad \mathfrak{B}_{di}^j + \mathfrak{B}_{gj}^i = 0$$

d'où

$$p_d = -p_z, \quad q_d = -q_z, \quad r_d = -r_z$$

Ces relations montrent que la rotation ou le déplacement d'un repère non commutatif présente des caractères beaucoup plus complexes qu'en Mécanique classique.

6. Composition des accélérations. — Nous appellerons *accélération* par rapport à un trièdre commutatif T_1 d'un corpuscule représenté par le point M de $(R_3(\mathfrak{X}))$, le vecteur dérivée totale par rapport au temps du vecteur vitesse $\left[\frac{d\mathfrak{V}}{d\tau} \right]_{/T_1}$ de ce corpuscule relativement au même trièdre

$$\mathbf{r}_{/T_1} = {}_d \left[\frac{d\mathfrak{V}}{d\tau} \right]_{/T_1} = \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{d\tau^2} \right]_{/T_1}.$$

Considérons maintenant un autre trièdre T quelconque (commutatif ou non commutatif). Dérivons la relation donnant la composition des vitesses, on a (en primant les dérivées)

$$(2) \quad \left[\frac{d^2 \overrightarrow{O_1 M}}{d\tau^2} \right]_{/T_1} = \left(\overrightarrow{O_1 \ddot{O}} \right)'' + \mathcal{J}'' \mathfrak{x}_g + \mathcal{J}'' \mathfrak{y}_g + \mathcal{K}'' \mathfrak{z}_g \\ + 2(\mathcal{J}' \mathfrak{x}'_g + \mathcal{J}' \mathfrak{y}'_g + \mathcal{K}' \mathfrak{z}'_g) + \mathcal{J} \mathfrak{x}''_g + \mathcal{J} \mathfrak{y}''_g + \mathcal{K} \mathfrak{z}''_g \\ = \left(\overrightarrow{O_1 \ddot{O}} \right)' + \mathfrak{x}_d \mathcal{J}'' + \mathfrak{y}_d \mathcal{J}'' + \mathfrak{z}_d \mathcal{K}'' + 2(\mathfrak{x}'_d \mathcal{J}' + \mathfrak{y}'_d \mathcal{J}' + \mathfrak{z}'_d \mathcal{K}') + \mathfrak{x}''_d \mathcal{J} + \mathfrak{y}''_d \mathcal{J} + \mathfrak{z}''_d \mathcal{K}.$$

Nous appellerons *accélération relative droite* de M par rapport au trièdre T l'opérateur vectoriel

$$\Gamma_{r,d} = {}_d \mathfrak{x}''_d \mathcal{J} + {}_d \mathfrak{y}''_d \mathcal{J} + {}_d \mathfrak{z}''_d \mathcal{K}$$

de même *accélération relative gauche*

$$\Gamma_{r,g} = {}_d \mathcal{J} \mathfrak{x}''_g + \mathcal{J} \mathfrak{y}''_g + \mathcal{K} \mathfrak{z}''_g.$$

Nous rappellerons *accélération d'entraînement droite* due au mouvement du trièdre T par rapport au trièdre T_1 :

$$\Gamma_{e,d} = {}_d \left(\overrightarrow{O_1 \ddot{O}} \right)'' + \mathfrak{x}_d \mathcal{J}'' + \mathfrak{y}_d \mathcal{J}'' + \mathfrak{z}_d \mathcal{K}''.$$

de même *accélération d'entraînement gauche* de M due au mouvement du trièdre T par rapport au trièdre T_1 :

$$\Gamma_{e,g} = {}_d \left(\overrightarrow{O_1 \ddot{O}} \right)' + \mathcal{J}'' \mathfrak{x}_g + \mathcal{J}'' \mathfrak{y}_g + \mathcal{K}'' \mathfrak{z}_g.$$

Considérons les termes en $\mathfrak{x}'_d \mathcal{J}'$, ou en $\mathcal{J}' \mathfrak{x}'_g$ de la relation (2). Nous pouvons remplacer $\mathcal{S}_i$ par sa valeur obtenue au paragraphe précédent (1), il vient

$$\mathfrak{x}'_d \mathcal{J}' = \mathfrak{x}'_d (\mathfrak{r}_d \mathcal{J} - \mathfrak{q}_d \mathcal{K}) + \mathfrak{x}'_d \mathfrak{B}_{d1} \mathcal{S}_i \\ \mathcal{J}' \mathfrak{x}'_g = (\mathcal{K} \mathfrak{q}_g - \mathcal{J} \mathfrak{r}_g) \mathfrak{x}'_g + \mathcal{S}_i \mathfrak{B}_{g1} \mathfrak{x}'_g.$$

Nous appellerons *accélération de Coriolis droite* :

$$\Gamma_{c,d} = {}_d 2 [(\mathfrak{x}'_d (\mathfrak{r}_d \mathcal{J} - \mathfrak{q}_d \mathcal{K}) + \mathfrak{y}'_d (\mathfrak{p}_d \mathcal{K} - \mathfrak{r}_d \mathcal{J}) + \mathfrak{z}'_d (\mathfrak{q}_d \mathcal{J} - \mathfrak{p}_d \mathcal{J}))]$$

et de même *accélération de Coriolis gauche* :

$$\Gamma_{c,g} = {}_d 2 [(\mathcal{K} \mathfrak{q}_g - \mathcal{J} \mathfrak{r}_g) \mathfrak{x}'_g + (\mathcal{J} \mathfrak{r}_g - \mathcal{K} \mathfrak{p}_g) \mathfrak{y}'_g + (\mathcal{J} \mathfrak{p}_g - \mathcal{J} \mathfrak{q}_g) \mathfrak{z}'_g]$$

et nous appellerons *accélération quantique droite* l'opérateur vectoriel

$$\Gamma_{q,d} = {}_d 2 \mathfrak{x}'_d \mathfrak{B}_{d1} \mathcal{S}_i$$

et de même *accélération quantique gauche* :

$$\Gamma_{q,g} = d^2 \mathfrak{E}_j \mathfrak{A}_k \dot{x}_k^i.$$

Toutes les définitions de la relation (2) nous conduisent à ce théorème :

THÉORÈME DE COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS DE CAZIN :

THÉORÈME II. — *L'accélération absolue d'un corpuscule par rapport au trièdre fondamental T_0 est la somme de l'accélération relative droite de ce corpuscule par rapport à un trièdre T en mouvement quantique quelconque par rapport à T_0 , de l'accélération d'entraînement droite due au mouvement de ce trièdre T par rapport à T_0 , de l'accélération de Coriolis droite et de l'accélération quantique droite de ce corpuscule.*

Nous aurons un énoncé analogue avec les quantités gauches :

L'accélération absolue d'un corpuscule par rapport au trièdre fondamental T_0 est la somme de l'accélération relative gauche de ce corpuscule par rapport à un trièdre T en mouvement quantique quelconque par rapport à T_0 , de l'accélération d'entraînement gauche due au mouvement de ce trièdre T par rapport à T_0 , de l'accélération de Coriolis gauche et de l'accélération quantique gauche de ce corpuscule.

Ce théorème se résume dans les deux formules

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_{r,d} + \Gamma_{e,d} + \Gamma_{c,d} + \Gamma_{q,d}, \\ \Gamma &= \Gamma_{r,g} + \Gamma_{e,g} + \Gamma_{c,g} + \Gamma_{q,g}. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que, dans le cas d'un trièdre commutatif T , les opérateurs vectoriels accélération quantique droite et gauche sont nuls et l'on trouve le théorème classique de composition des accélérations.

7. Cinétique opératorielle symbolique. — En Mécanique classique, on passe de la Cinématique à la Cinétique en adjoignant aux notions cinématiques la notion de masse. Un passage semblable peut s'effectuer ici; mais la masse n'apparaît en cinétique que comme un coefficient numérique positif abstrait; ce n'est qu'en Dynamique que la masse se présente comme coefficient d'inertie. Pour marquer cette différence, on peut employer le terme de *masse abstraite* : ce sera un multiplicateur numérique positif attaché à chaque corpuscule.

Si le mouvement d'un système est rapporté à un repère commutatif T_c , nous associerons à la vitesse $\mathcal{V} =_d \left[\frac{dM}{dt} \right]_{/T_c}$ d'un corpuscule représenté par un point M de $(R_3(\mathfrak{X}))$ auquel on attribue une masse m , les opérateurs suivants :

1° l'opérateur vectoriel *quantité de mouvement* :

$$\mathfrak{X} =_d m \mathcal{V};$$

2° l'opérateur *énergie cinétique* :

$$\mathfrak{E} =_d \frac{1}{2} m \mathcal{V}^2 = \frac{1}{2m} \mathfrak{X}^2;$$

3° l'opérateur *moment cinétique* :

$$\mathfrak{M} = \overrightarrow{OM} \wedge \mathfrak{X} = m \overrightarrow{OM} \wedge \mathcal{V}.$$

Dans le mouvement rapporté à un trièdre non commutatif T_n , en tenant compte du théorème de composition des vitesses, nous sommes conduit à poser les définitions suivantes pour les grandeurs cinétiques fondamentales :

1° les opérateurs vectoriels *quantité de mouvement droite* et *quantité de mouvement gauche* :

$$\mathfrak{X}_d =_d m \mathcal{V}_{r,d}, \quad \mathfrak{X}_g =_d m \mathcal{V}_{r,g};$$

2° l'opérateur *énergie cinétique* :

$$\mathfrak{E}_r =_d \frac{1}{2} m (\mathcal{V}_{r,d} \cdot \mathcal{V}_{r,g}) = \frac{1}{2m} (\mathfrak{X}_{r,d} \cdot \mathfrak{X}_{r,d});$$

3° les opérateurs *moment cinétique droit* et *moment cinétique gauche* :

$$\mathfrak{M}_d = - \mathfrak{X}_d \wedge \overrightarrow{OM}, \quad \mathfrak{M}_g = \overrightarrow{OM} \wedge \mathfrak{X}_g.$$

Nous associerons à un système S des opérateurs analogues obtenus par sommation sur les corpuscules du système; le mouvement étant rapporté à un repère commutatif, nous poserons ces définitions :

1° La *résultante cinétique* :

$$\mathfrak{X} =_d \sum_i \mathfrak{X}_i;$$

2° *L'énergie cinétique :*

$$\mathfrak{E} = {}_d \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathfrak{V}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2 m_i} \mathfrak{P}$$

3° *Le moment cinétique :*

$$\sigma_0 = {}_d \sum_i \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge \mathfrak{P}_i.$$

De même si le mouvement est rapporté à un repère non commutatif T_n , nous poserons en vertu des définitions précédentes :

1° *résultante cinétique droite et résultante cinétique gauche :*

$$\mathfrak{P}_d = {}_d \sum_i \mathfrak{P}_{d,i}, \quad \mathfrak{P}_g = {}_d \sum_i \mathfrak{P}_{g,i};$$

2° *énergie cinétique :*

$$\mathfrak{E} = {}_d \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathfrak{V}_{rd,i} \cdot \mathfrak{V}_{rg,i}) = \sum_i \frac{1}{2 m_i} (\mathfrak{P}_{rd,i} \cdot \mathfrak{P}_{rg,i});$$

3° *moment cinétique droit et moment cinétique gauche :*

$$\sigma_d = {}_d \sum_i -\mathfrak{P}_{d,i} \wedge \overrightarrow{\text{OM}}_i, \quad \sigma_g = {}_d \sum_i \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge \mathfrak{P}_{g,i}$$

Les sommations sont étendues à tous les corpuscules du système considéré.

8. *Relations entre opérateurs cinétiques dans les mouvements relatifs.* — Considérons un trièdre T_1 commutatif et un trièdre T non commutatif en mouvement par rapport à T_1 . D'après le théorème de composition des vitesses, nous avons pour les opérateurs cinétiques :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{a,i} &= \mathfrak{P}_{e,d,i} + \mathfrak{P}_{r,d,i} = \mathfrak{P}_{e,g,i} + \mathfrak{P}_{r,g,i}, \\ \mathfrak{E}_{a,i} &= \frac{1}{2 m_i} \mathfrak{P}_{a,i}^2 = \frac{1}{2 m_i} (\mathfrak{P}_{e,d,i} + \mathfrak{P}_{r,d,i}) (\mathfrak{P}_{e,g,i} + \mathfrak{P}_{r,g,i}), \\ &= \mathfrak{E}_{e,i} + \mathfrak{E}_{r,i} + \frac{1}{2 m_i} [(\mathfrak{P}_{rd,i} \cdot \mathfrak{P}_{eg,i}) + (\mathfrak{P}_{e,d,i} \cdot \mathfrak{P}_{r,g,i})], \\ \mathfrak{M}_{a,i} &= \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge \mathfrak{P}_{a,i} = \overrightarrow{\text{OM}}_i \wedge (\mathfrak{P}_{e,g,i} + \mathfrak{P}_{r,g,i}) = \mathfrak{M}_{e,g,i} + \mathfrak{M}_{r,g,i}. \end{aligned}$$

Pour les opérateurs associés à un système, nous aurons des relations

semblables après sommation sur les corpuscules :

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_a &= \mathfrak{X}_{e,d} + \mathfrak{X}_{r,d} = \mathfrak{X}_{e,g} + \mathfrak{X}_{r,g}, \\ \mathfrak{C}_a &= \mathfrak{C}_e + \mathfrak{C}_r + \sum_i \frac{1}{2m_i} [(\mathfrak{X}_{rd,i} \cdot \mathfrak{X}_{eg,i}) + (\mathfrak{X}_{ed,i} \cdot \mathfrak{X}_{rg,i})], \\ \sigma_{0,a} &= \sigma_{0,e,g} + \sigma_{0,r,g}.\end{aligned}$$

9. Centre de gravité. — Nous appellerons *barycentre* ou *centre de gravité* d'un système S de corpuscules le point G de l'espace $(R_3(\mathfrak{X}))$ défini ainsi

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}.$$

On vérifie immédiatement que G est indépendant du point O et qu'on a

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = 0$$

Si nous attribuons au point G la masse totale du système, on voit que sa quantité de mouvement est la résultante cinétique car en dérivant la relation de définition de G, on a

$$\left(\sum_i m_i\right) \mathfrak{V}_G = \sum_i m_i \mathfrak{V}_i = \mathfrak{X}.$$

Considérons alors le trièdre T_G d'origine G et d'axes parallèles au repère commutatif T_1 auquel on rapporte le mouvement. Ce trièdre T_G ayant mêmes vecteurs unitaires des axes que T_1 et son origine appartenant à $(R_3(\mathfrak{X}))$, est un trièdre commutatif. En dérivant symboliquement par rapport au temps la relation précédente, on a

$$(3) \quad \sum_i m_i \mathfrak{V}_{r,i} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_i \mathfrak{X}_{r,i} = 0.$$

D'où, d'après les théorèmes de composition des mouvements :

$$\mathfrak{C}_a = \mathfrak{C}_e + \mathfrak{C}_r + \sum_i \frac{1}{2m_i} [(\mathfrak{X}_{rd,i} \cdot \mathfrak{X}_{eg,i}) + (\mathfrak{X}_{ed,i} \cdot \mathfrak{X}_{rg,i})],$$

mais ici

$$\mathfrak{X}_{eg,i} = m_i \mathfrak{V}_G = \mathfrak{X}_{ed,i} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_{rd,i} = \mathfrak{X}_{rg,i}$$

puisque le repère d'origine G est en translation par rapport à T_1 , et en tenant compte de (3), on a

$$\mathfrak{C}_a = \mathfrak{C}_e + \mathfrak{C}_r,$$

ce qui constitue le théorème de Koenig entre opérateurs pour l'énergie cinétique :

THÉORÈME (THÉORÈME DE KOENIG POUR LA FORCE VIVE). — *L'opérateur force vive d'un système est égal à la somme de l'opérateur force vive de ce système dans son mouvement autour de son centre de gravité repéré par rapport au repère T_G d'origine G et de directions fixes par rapport à T_1 , et de l'opérateur force vive du centre de gravité doué de la masse totale du système.*

Remarquons que la dérivation symbolique donne directement le théorème de Koenig tandis qu'une étude détaillée fondée sur les changements de variables montre qu'il faut tenir compte de considérations supplémentaires liées au fait qu'on a des paramètres surabondants ⁽¹⁾.

10. Le principe des équations différentielles. — En vertu de la persistance des structures formelles, nous sommes conduit à admettre pour la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules un principe des équations différentielles ayant même forme qu'en Mécanique classique, mais où les dérivées sont des dérivées symboliques définies selon les règles du chapitre précédent. L'égalité entre opérateurs doit être prise dans le sens suivant : pour toute fonction d'onde du système il y a égalité entre les résultats obtenus quand on applique à la fonction d'ondes l'un ou l'autre opérateur. Ce qu'on écrit n'est donc pas une identité entre opérateurs mais une équation qui sera remplie pour toutes les fonctions solutions du système considéré. Nous admettrons donc :

POSTULAT V : PRINCIPE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Il existe au moins un repère cinématique commutatif T_1 tel que dans son mouvement rapporté à ce trièdre T_1 et à une échelle de temps cinétique $[\tau]$, tout corpuscule d'un système observable S représenté par un point M_i de $(R_3(\mathfrak{X}))$ prend, du fait de la présence d'autre corpuscules M_j , une accélération $\frac{d^2 M_i}{d\tau^2}$ bien déterminée qui ne dépend que*

⁽¹⁾ L. DE BROGLIE et J.-L. DESTOUCHES, *C. R. Acad. Sc.*, t. 201, 1935, p. 369. J. L. DESTOUCHES, *La Cinétique opératorielle (Actualités Scientifiques, fasc. 409, Hermann, Paris, 1936)*.

des opérateurs positions et des opérateurs vitesses des différents corpuscules $M_1, \dots, M_n$ du système S et du temps τ , soit

$$(4) \quad \frac{d^2 M_i}{d\tau^2} = \Phi_i(M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n; \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \dots, \mathfrak{V}_i, \dots, \mathfrak{V}_n; \tau),$$

où $\frac{d^2 M_i}{d\tau^2}$ est la dérivée symbolique seconde de M_i par rapport au temps τ .

En ce qui concerne la notion de système mécanique, il convient de faire ici les mêmes remarques qu'en Mécanique classique (voir p. 2 à 5).

10. Intégrales premières. — Les équations vectorielles du système (4) peuvent se mettre sous la forme d'un système de $6N$ équations différentielles comme nous en avons considéré au chapitre précédent. Il suffit de projeter sur les axes et d'introduire les vitesses comme des variables :

$$(5) \quad \frac{d\mathfrak{X}_i}{d\tau} = \mathfrak{V}_{x,i},$$

$$\frac{d\mathfrak{V}_{x,i}}{d\tau} = \Phi_{x,i}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_N, \mathfrak{Y}_N, \mathfrak{Z}_N; \mathfrak{V}_{x,1}, \mathfrak{V}_{y,1}, \mathfrak{V}_{z,1}, \mathfrak{V}_{x,2}, \dots, \mathfrak{V}_{z,N}; \tau),$$

avec des équations semblables en y et z , ce qui nous donne bien un système de $6N$ équations différentielles symboliques au sens du chapitre précédent (voir p. 99). Nous avons alors $6N$ variables $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{Z}_N, \mathfrak{V}_{x,1}, \dots, \mathfrak{V}_{z,N}$ qui sont divisées en deux classes par leur signification mécanique : les coordonnées et les composantes des vitesses.

Les propriétés des intégrales dépendant de p constantes et des intégrales premières s'appliquent à ce cas particulier (voir p. 102); la distinction des variables en deux classes donne à l'équation aux intégrales premières (voir p. 103) la forme suivante : si $\mathfrak{g}$ est intégrale première, elle satisfait à l'équation

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \tau} + \chi_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1, \dots, \mathfrak{Z}_N, \mathfrak{V}_{x,1}, \dots, \mathfrak{V}_{z,N}; \mathfrak{V}_{x,1}, \mathfrak{V}_{y,1}, \dots, \mathfrak{V}_{z,N}; \Phi_{x,1}, \Phi_{y,1}, \dots, \Phi_{z,N}; \tau) = 0.$$

Les $\mathfrak{V}_{x,i}$ interviennent deux fois comme arguments de Φ_1 : une première fois comme variables, une seconde fois linéairement comme seconds membres des équations du mouvement : celles de la forme

$$\frac{d\mathfrak{X}_i}{dt} = \mathfrak{V}_{x,i}.$$

EXEMPLE. — 1° Supposons que $\Phi_{x,t} = 0$, alors $\mathbf{v}_{x,t}$ est intégrale première puisque

$$\frac{d\mathbf{v}_{x,t}}{d\tau} = 0;$$

on a aussi l'intégrale première :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{X}_1 - \mathbf{v}_{x,1} \bullet \tau,$$

en effet

$$d\mathfrak{g} = d\mathfrak{X}_1 - (d\mathbf{v}_{x,t})\tau - \mathbf{v}_{x,t} d\tau \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \tau} = -\mathbf{v}_{x,1},$$

d'où $\frac{d\mathfrak{g}}{d\tau}$, et l'équation aux intégrales premières donne, en remplaçant les dérivées des variables $\mathfrak{X}_1$ et $\mathbf{v}_{x,1}$ par les seconds membres, respectivement $\mathbf{v}_{x,1}$ et 0 :

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathbf{v},$$

et l'équation est vérifiée.

2° Supposons qu'on ait

$$\sum_i \Phi_{x,t} = 0,$$

alors

$$\mathfrak{g} = \sum_i m_i \mathbf{v}_{x,t}$$

est intégrale première. En effet,

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{et} \quad d\mathfrak{g} = \sum_i m_i d\mathbf{v}_{x,t},$$

d'où

$$\mathfrak{Z}_1 = \sum_i m \Phi_{x,t,t}$$

or ceci est nul par hypothèse, donc $\mathfrak{g}$ est bien intégrale première.

12. Le principe de l'inertie. — On vérifierait comme en Mécanique classique que le principe des équations différentielles reste valable lors d'un changement de repère commutatif et lors d'un changement d'échelle de temps cinématique. Les principes de la Dynamique viennent imposer des conditions aux fonctions Φ_i ; il suffit alors d'exprimer des conditions pour un repère particulier et une échelle de temps particulière. De cette façon, on pourra constituer une dynamique opératorielle qui sera une

theorie partielle de la Mécanique ondulatoire et qui contiendra ce qui subsiste en Mécanique ondulatoire des structures de la Mécanique classique.

Si l'on veut garder une forme purement opératorielle pour les principes de la Dynamique, il faut modifier assez fortement les énoncés classiques de telle façon qu'ils portent sur les fonctions Φ_i elles-mêmes et non pas sur les trajectoires, comme cela a lieu pour l'énoncé classique du principe de l'inertie. On peut adopter la forme suivante qui dérive directement des énoncés classiques du chapitre I.

POSTULAT VI : PRINCIPE DE L'INERTIE. — *Il existe un repère commutatif T_0 et une échelle de temps $[t]$ tels que si*

$$\frac{dM_i}{dt} = \Phi_i(M_1, \dots, M_i, \dots, M_N; \mathfrak{V}_1, \dots, \mathfrak{V}_N; t)$$

est l'équation différentielle à laquelle obéit un corpuscule représenté par un point M_i lorsqu'il appartient à un système observable S contenant N corpuscules, alors :

a. Si l'on substitue à la variable M_i un point P de l'espace euclidien (R_3) infiniment éloigné du repère T_0 , la fonction Φ_i est infiniment petite;

b. si l'échelle de temps $[t]$ a été fixée pour que cette condition soit remplie par le corpuscule figuré par M_i , alors pour cette échelle de temps $[t]$ la même condition est remplie pour tout corpuscule et tout système.

La partie *a* du postulat signifie que pour certains opérateurs vectoriels $\mathfrak{A}$, on a défini une norme $\|\mathfrak{A}\|$ telle que si à M_i on substitue un point P_i de (R_3) , les autres variables gardant leur caractère opératoriel, on a

$$\forall \varepsilon. \exists N. |\overrightarrow{OP}| > N \Rightarrow \|\Phi_i(M_1, \dots, M_{i-1}, P_i, M_{i+1}, \dots, M_N; \mathfrak{V}_1, \dots, \mathfrak{V}_N; t)\| < \varepsilon.$$

La partie *b* exprime que si l'échelle $[t]$ est choisie telle que la condition précédente ait lieu pour un certain corpuscule, la condition sera valable pour tout corpuscule et cela quel que soit le système observable S dans lequel il entre.

La modification au principe classique de l'inertie permet en somme d'exprimer le contenu du principe de l'inertie sans parler de trajectoire ni d'éloignement d'un corpuscule. Il traduit le fait que si l'on adopte

une échelle de temps privilégiée, la force que subit un corpuscule tend vers zéro lorsque celui-ci s'éloigne indéfiniment.

On peut aussi obtenir une autre forme d'énoncé qui évite de faire intervenir la norme d'un opérateur de la façon suivante : au lieu de substituer à M_i seulement un point P_i de (R_3) , on substitue à toutes les variables opératorielles des variables numériques, alors Φ_i devient une fonction numérique ; on pose que toutes les autres variables numériques demeurent finies, et P_i s'éloignant indéfiniment, on a

$$\forall \varepsilon. \exists N. \left| \overrightarrow{OP_i} \right| \geq N \rightarrow |\Phi_i(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t)| < \varepsilon,$$

les $\mathbf{v}_i$ étant les vecteurs numériques substitués aux opérateurs $\mathfrak{V}_i$ et les P_j les points de (R_3) substitués aux M_i . Ceci fournit une autre forme du principe de l'inertie qui convient également.

13. **Le principe de l'action et de la réaction.** — Pour ce principe comme pour le principe de l'inertie, il faut modifier l'énoncé classique pour pouvoir l'exprimer sous forme opératorielle. La condition classique que les deux points matériels doivent être infiniment éloignés des autres points peut être transformée ici en disant que les deux corpuscules constituent un système de corpuscules observables. En effet, dire que des corpuscules forment un système revient au fond à dire qu'ils sont suffisamment éloignés des autres corpuscules pour qu'on puisse les considérer indépendamment des autres. Nous pouvons donc poser :

POSTULAT VII : PRINCIPE DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION. — *a. Le mouvement étant rapporté au repère fondamental T_0 et à une échelle de temps privilégiée $[t]$, si deux corpuscules forment un système physique observable, les fonctions vectorielles Φ_1 et Φ_2 de ces deux corpuscules introduites par le principe des équations différentielles sont dirigées suivant la droite $M_1 M_2$, c'est-à-dire qu'on a*

$$\Phi_1(M_1, M_2; \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2; t) = \sum_i \lambda_i(M_1, M_2; \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2; t) \cdot \overrightarrow{M_2 M_1}, \mu_i(M_1, M_2; \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2; t)$$

et une expression semblable pour Φ_2 .

b. si l'on substitue à $M_1, M_2, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2$ des variables numériques $P_1, P_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ dans Φ_1 et Φ_2 , on obtient, en vertu des commutations qui s'établissent alors

$$\begin{aligned} \Phi_1(P_1, P_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) &= \lambda_1(P_1, P_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) \cdot \overrightarrow{M_2 M_1}, \\ \Phi_2(P_1, P_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) &= \lambda_2(P_1, P_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \end{aligned}$$

et les fonctions numériques λ_1 et λ_2 sont de même signe (quelles que soient les valeurs prises par les variables numériques)

$$\lambda_1(P_1, P_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \cdot \lambda_2(P_1, P_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) > 0.$$

En outre λ_1 et λ_2 sont des fonctions de t , de $r_{12} = \left| \overrightarrow{P_1 P_2} \right|$ et de $\frac{dr_{12}}{dt}$.

14. Principe de la masse. — La notion de masse en Mécanique ondulatoire non relativiste est directement transposée de la Mécanique sans aucune modification. On peut donc adopter un principe de la masse correspondant à celui de la Mécanique classique. Mais il faut modifier sa forme pour l'exprimer en fonction des Φ_i au lieu des accélérations, et les rendre numériques. Nous poserons :

POSTULAT VIII : PRINCIPE DE LA MASSE. — Si pour un système observable S de corpuscules dont le mouvement est rapporté au repère fondamental T_0 et à une échelle de temps privilégiée $[t]$, on considère séparément chaque paire de corpuscules de ce système, alors si Φ_{ij} désigne la fonction Φ du $j^{\text{ième}}$ corpuscule couplé avec le $i^{\text{ième}}$ et si l'on substitue des variables numériques aux variables figurant dans Φ_{ij} et cela pour toute paire (i, j) de corpuscules de S , on a les relations numériques

$$\frac{|\Phi_{ij}|}{|\Phi_{ji}|} = \frac{|\Phi_{ik}|}{|\Phi_{ki}|} \cdot \frac{|\Phi_{kj}|}{|\Phi_{jk}|}$$

et cela pour chaque triple M_i, M_j, M_k de corpuscules et pour tout système S observable.

Ce principe appelle les mêmes critiques qu'en Mécanique classique (voir p. 10 et 12). Comme pour le principe de l'action et de la réaction, l'éloignement à l'infini des paires est remplacé par la condition qu'une paire est considérée seule, c'est-à-dire que tous les autres corpuscules sont considérés à ce moment comme inexistantes ou infiniment éloignés.

A partir de ce principe de la masse, comme en Mécanique classique et de la même façon, on pourra attribuer à chaque corpuscule un coefficient numérique positif appelé *masse d'inertie*, et défini à une masse arbitraire près qu'on peut prendre pour unité. De cette façon, la masse est une propriété intrinsèque du corpuscule.

15. Les autres principes. — Le principe de superposition de la Mécanique classique ne demande pratiquement pas de modification :

POSTULAT IX : PRINCIPE DE SUPERPOSITION. — Si l'on considère un système observable de N corpuscules, le corpuscule figuré par le

point M_i subira du fait de la présence des autres corpuscules une accélération qui sera la somme géométrique des accélérations que prendrait le corpuscule M_i s'il était en présence de chacun des autres pris isolément pour former avec chacun un système de deux corpuscules

$$\Phi_i = \sum_j \Phi_{ji}.$$

La loi de la gravitation universelle de Newton peut être acceptée sans modification, mais en Microphysique les forces de gravitation sont toujours négligeables devant les forces électrostatiques ou les forces nucléaires. On peut aussi accepter la loi de Coulomb qui joue un rôle fondamental en Mécanique ondulatoire non relativiste. Le principe du repère fondamental (voir p. 11) doit être accepté sans modification, le trièdre principal étant pris au sens classique.

En effet, dans les théorèmes de composition des mouvements, nous avons vu qu'il était essentiel de distinguer entre repères commutatifs et repères non commutatifs, c'est-à-dire en fait entre repères macroscopiques définis par nos appareils de mesures et servant à repérer les résultats de mesures, et repères microscopiques dont les mouvements sont liés à ceux des corpuscules et qui ne peuvent servir de repères à des observations. Le repère fondamental sert de repère aux observations, il doit être macroscopique, il doit être défini d'une manière classique.

On peut aussi définir d'une manière quantique un repère principal. Il y aura une liaison stochastique entre le repère défini d'une façon classique et celui défini d'une façon quantique avec un écart quadratique moyen très petit mais non nul.

Une question qui reste encore ouverte est celle de savoir si cet écart a une signification physique importante ou non. En tout cas, en Mécanique ondulatoire usuelle, il suffit de considérer le repère classique. Si cet écart a une importance, on peut toujours le faire entrer dans la description fonctionnelle des corpuscules, et l'on peut donc pour le moment prendre la définition classique des repères.

16. Autre système de principes. — Au système de principes que nous venons d'énoncer, on peut faire les mêmes critiques qu'aux principes correspondants de la Mécanique classique. On peut alors effectuer sur ces principes une modification semblable à celle que nous avons faite en Mécanique classique au chapitre III. Il suffit de transposer les raisonnements déjà faits et pour ne pas trop allonger l'exposé, nous n'entrerons

pas dans les détails. Les trièdres principaux seront définis d'une manière classique (on peut aussi le faire d'une manière quantique mais la transposition est alors moins aisée). La masse d'un corpuscule, de ce point de vue, est une propriété de solidarité de ce corpuscule avec le reste de l'univers.

17. Équations des mouvements relatifs. — Si nous rapportons le mouvement d'un système de corpuscules à un trièdre quelconque T , nous pouvons écrire entre les corpuscules un système d'équations différentielles; en effet, de la relation

$$m_j \Gamma_j = \mathfrak{F}_j$$

obtenue à partir du principe des équations différentielles, en définissant la force $\mathfrak{F}_j$ comme la fonction Φ_j multipliée par la masse

$$\mathfrak{F}_j = m_j \Phi_j,$$

quand on rapporte le mouvement au repère fondamental T_0 , on obtient en vertu du théorème de composition des accélérations :

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= \Gamma_{ed,j} + \Gamma_{rd,j} + \Gamma_{cd,j} + \Gamma_{qd,j}, \\ \Gamma_j &= \Gamma_{r'z,j} + \Gamma_{r''z,j} + \Gamma_{r''z,j} + \Gamma_{r''z,j}. \end{aligned}$$

en remplaçant Γ_j par son expression tirée de la première de ces deux relations, on a

$$m_j (\Gamma_{ed,j} + \Gamma_{rd,j} + \Gamma_{cd,j} + \Gamma_{qd,j}) = \mathfrak{F}_j$$

et nous aurons une équation analogue avec les quantités gauches.

Nous pouvons donner à cette équation du mouvement la même forme qu'à celle du mouvement rapporté au trièdre T_0 à condition de modifier la force d'une façon convenable, c'est-à-dire en lui ajoutant des *forces d'inertie*.

Si nous posons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{cd,j} &= d - m_j \Gamma_{ed,j} & \mathfrak{F}_{cd,j} &= d - m_j \Gamma_{cd,j} & \mathfrak{F}_{qd,j} &= d - m_j \Gamma_{qd,j}, \\ \mathfrak{F}_{rd,j} &= d \mathfrak{F}_j + \mathfrak{F}_{ed,j} + \mathfrak{F}_{cd,j} + \mathfrak{F}_{qd,j} \end{aligned}$$

nous avons pour équation du mouvement

$$m_j \Gamma_{rd,j} = \mathfrak{F}_{rd,j}.$$

En posant des définitions semblables pour les quantités gauches, on a

$$m_j \Gamma_{rg,j} = \mathfrak{F}_{rg,j}.$$

L'opérateur vectoriel $\mathfrak{F}_{rd,j}$ sera appelé *opérateur force droite relative au trièdre T*. Les trois vecteurs $\mathfrak{F}_{ed,j}$, $\mathfrak{F}_{cd,j}$, $\mathfrak{F}_{qd,j}$ *forces d'inertie droites*. On a de même des quantités gauches et pour un trièdre T commutatif, les vecteurs droits et gauches sont égaux. Il faut bien remarquer que ces forces d'inertie ne sont pas de véritables forces (c'est-à-dire des fonctions $m_j \Phi_j$) mais des quantités d'accélération. D'où ce théorème :

THÉORÈME DES MOUVEMENTS RELATIFS. — *Le mouvement d'un corpuscule M_i d'un système par rapport à un trièdre T quelconque est régi par des équations de forme semblable à celles du mouvement par rapport au trièdre fondamental F_0 , mais pour un trièdre non commutatif, il faut distinguer entre équation droite et équation gauche :*

$$m_j \Gamma_{rd,j} = \mathfrak{F}_{rd,j}, \quad m_j \Gamma_{rg,j} = \mathfrak{F}_{rg,j}.$$

L'accélération relative (droite ou gauche) multipliée par la masse est égale à la force relative (droite ou gauche). La force relative (droite ou gauche) se déduit de la force par rapport au trièdre fondamental en lui ajoutant les forces d'inertie (droites ou gauches).

18. Théorèmes fondamentaux. — Les théorèmes de Mécanique classique qui se déduisent des principes par des transformations algébriques simples se transposent immédiatement au cas de la Mécanique opératorielle. C'est le cas notamment pour les théorèmes de la résultante cinétique, du moment cinétique, du mouvement du centre de gravité.

Examinons à titre d'exemple le théorème des forces vives, d'abord sous forme différentielle. Des équations fondamentales valables pour un mouvement rapporté à un repère quelconque (non commutatif en général)

$$m_j \frac{d\mathfrak{V}_{rd,j}}{dt} = \mathfrak{F}_{rd,j}, \quad m_j \frac{d\mathfrak{V}_{rg,j}}{dt} = \mathfrak{F}_{rg,j};$$

en multipliant la première à droite par $\mathfrak{V}_{rg,j}$, la seconde à gauche par $\mathfrak{V}_{rd,j}$, et en additionnant on a

$$m_j \frac{d}{dt} (\mathfrak{V}_{rd,j} \cdot \mathfrak{V}_{rg,j}) = (\mathfrak{V}_{rd,j} \cdot \mathfrak{F}_{rg,j}) + (\mathfrak{F}_{rd,j} \cdot \mathfrak{V}_{rg,j}).$$

Nous appellerons *travail élémentaire* de la force $\mathfrak{F}_j$ la forme différentielle

$$d\mathfrak{E}_j = d \frac{1}{2} [(dM_j \cdot \mathfrak{F}_{rd,j}) + (\mathfrak{F}_{rg,j} \cdot dM_j)]$$

et nous appellerons *énergie cinétique relative*

$$\mathfrak{T}_{r,j} = {}_d \frac{1}{2} m_j (\mathfrak{V}_{r3,j} \cdot \mathfrak{V}_{r3,j}).$$

Remontons des dérivées aux différentielles en nous souvenant que

$$\mathfrak{V}_{r,d} = \mathfrak{x}'_{d,l} \cdot \mathfrak{E}_l, \quad \mathfrak{V}_{r,g} = \mathfrak{E}_l \cdot \mathfrak{x}'_{g,l}$$

et que

$$dM = d\mathfrak{x}_{d,i} \cdot \mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}_i \cdot d\mathfrak{x}_{i,d},$$

on a alors

$$d\mathfrak{T}_{r,j} = d\mathfrak{S}_j.$$

En sommant sur l'ensemble des points, en utilisant la définition de l'énergie cinétique $\mathfrak{T} = {}_d \sum_j \mathfrak{T}_j$, et en posant

$$d\mathfrak{S} = {}_d \sum_j d\mathfrak{S}_j,$$

on a

$$d\mathfrak{T} = d\mathfrak{S}$$

C'est le théorème des forces vives sous forme différentielle.

THÉORÈME DES FORCES VIVES. — *La différentielle totale de l'énergie cinétique d'un système de corpuscules est égale au travail élémentaire des forces appliquées aux corpuscules.*

Ce théorème est valable pour tout corpuscule et quel que soit le repère adopté. Dans le cas d'un repère commutatif, on a des expressions plus simples car il n'y a pas lieu de distinguer entre vecteurs droits et gauches.

Supposons alors qu'il existe une fonction de forces au sens strict $\mathfrak{U}(M_1, \dots, M_N)$ telle que

$$d\mathfrak{S} = d\mathfrak{U},$$

alors le théorème des forces vives prend la forme $d\mathfrak{T} = d\mathfrak{U}$. En remontant des différentielles aux fonctions, on obtient l'intégrale première des forces vives

$$\mathfrak{T} - \mathfrak{U} = \mathfrak{C} \quad (\text{où } d\mathfrak{C} = 0, \mathfrak{C} \text{ est une constante}).$$

On vérifierait qu'elle satisfait bien à l'équation des intégrales premières, p. 103.

19. **Problème des deux corps.** — Pour illustrer les résultats qui précèdent, traitons le problème des deux corps. Soient deux corpuscules figurés par des points M_1 et M_2 . Ils obéissent à des équations

$$\frac{d\mathfrak{X}_1}{dt} = \mathfrak{F}_1, \quad \frac{d\mathfrak{X}_2}{dt} = \mathfrak{F}_2.$$

Comme il n'y a pas de force extérieure par hypothèse, on a en vertu de l'égalité de l'action et de la réaction

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = 0.$$

Alors les six intégrales premières du centre de gravité et celle des forces vives nous donnent ici

$$\mathfrak{X} = \alpha, \quad \overrightarrow{OG} - \frac{\mathfrak{X}}{m} t = \overrightarrow{OG}_0,$$

$$\frac{1}{2m} \mathfrak{X}^2 = \mathfrak{E}_G.$$

Étudions le mouvement autour du centre de gravité par rapport au repère T_G d'origine G et d'axes parallèles à ceux du repère commutatif T_0 par rapport auquel on étudie le mouvement. Alors T_G est aussi un repère commutatif. Comme il y a translation, les théorèmes de composition des mouvements se réduisent ici à

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_G + \mathfrak{V}_{r,j}; \quad \Gamma_j = \Gamma_G + \Gamma_{r,j} \quad (j = 1, 2);$$

$$m_j \Gamma_{r,j} = \mathfrak{F}_j - m_j \Gamma_G \quad \text{et} \quad \Gamma_G = \sigma;$$

on a

$$\frac{d\sigma_{r,G}}{dt} = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \mathfrak{F}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \mathfrak{F}_2$$

en vertu de l'égalité de l'action et de la réaction, le second membre est nul, donc les composantes de $\sigma_{r,G}$ sont des intégrales premières, d'où

$$\sigma_{r,G} = \mathfrak{B}.$$

S'il y a fonction de forces U (cas de forces centrales) on a l'intégrale première des forces vives pour le mouvement relatif autour du centre de gravité

$$\frac{1}{2} m_1 \mathfrak{V}_{r,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathfrak{V}_{r,2}^2 - U = \mathfrak{E}_r.$$

Considérons maintenant un point M défini à partir d'un point fixe O par

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_2 M_1},$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d^2 M}{dt^2} &= \Gamma_{r,1} - \Gamma_{r,2} = \frac{\mathcal{F}_1}{m_1} - \frac{\mathcal{F}_2}{m_2} \\ &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathcal{F}_1 = \frac{1}{\mu} \mathcal{F}_1.\end{aligned}$$

Donc le mouvement des corpuscules M_1, M_2 autour de leur bary-centre est le même que celui d'un corpuscule soumis à la même force, mais affecté de la masse réduite μ moyenne harmonique de m_1 et m_2 :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

En particulier s'il y a fonction de forces pour l'intégrale des forces vives, on a

$$\frac{1}{2} \mu \mathcal{V}_M^2 - U = \mathcal{E}_r$$

car

$$\mathcal{V}_M = \mathcal{V}_{r,1} - \mathcal{V}_{r,2}$$

et comme

$$m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = 0$$

on a

$$m_1 \mathcal{V}_{r,1} + m_2 \mathcal{V}_{r,2} = 0;$$

d'où

$$\mathcal{V}_M = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \mathcal{V}_{r,1} = - \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \mathcal{V}_{r,2}$$

et

$$\begin{aligned}m_1 \mathcal{V}_{r,1}^2 + m_2 \mathcal{V}_{r,2}^2 &= \left[m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] \mathcal{V}_M^2 \\ &= \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \mathcal{V}_M^2 = \mu \mathcal{V}_M^2.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le mouvement des deux corps quand on transporte l'origine du repère en l'un des deux corps, soit M_2 . Étudions le mouvement du système par rapport au repère T_2 d'origine M_2 . On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}_1 &= \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{M_2 M_1}, \\ \mathcal{V}_1 &= \mathcal{V}_e + \mathcal{V}_r, \quad \mathcal{V}_e = \mathcal{V}_2, \quad \mathcal{V}_{r,2} = 0;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \Gamma_e + \Gamma_r, \quad \Gamma_e = \Gamma_r = \frac{\mathcal{F}_2}{m_2} = - \frac{\mathcal{F}_1}{m_1}, \\ m_1 (\Gamma_e + \Gamma_r) &= \mathcal{F}_1;\end{aligned}$$

d'où les équations du mouvement relatif

$$m_1 \Gamma_r = \mathcal{F}_1 - m_1 \Gamma_r = \mathcal{F}_1 + \frac{m_1}{m_2} \mathcal{F}_1 ;$$

d'où

$$\Gamma_r = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathcal{F}_1$$

et enfin

$$\mu \Gamma_r = \mathcal{F}_1.$$

Donc le mouvement rapporté à l'un des corpuscules est le même que le mouvement du point M associé au mouvement autour du centre de gravité, en particulier on a l'intégrale première des forces vives :

$$\frac{1}{2} \mu \mathcal{V}_{r,1}^2 - U = \mathcal{E}_r.$$

d'où ce théorème :

THÉORÈME. — *On a en Dynamique opératorielle pour le problème des deux corps exactement les mêmes relations qu'en Mécanique classique.*

De l'intégrale des forces vives, on déduit immédiatement l'équation de Schrödinger du mouvement relatif quand on place l'origine en un corpuscule [M_2 par exemple ⁽¹⁾] :

$$\left(\frac{1}{2\mu} \mathcal{P}^2 - U \right) \Psi = E \Psi,$$

il n'y a donc aucune correction de nature quantique. Ce résultat est utile pour la recherche du mouvement d'un système de deux corpuscules en théorie de la double solution de M. Louis de Broglie ⁽²⁾.

20. Équations canoniques. — Les changements de paramètres et l'adoption de paramètres q_i en coordonnées curvilignes quelconques présentent quelques difficultés en calcul opératorielle, aussi nous limiterons-nous au cas des coordonnées cartésiennes. Les équations introduites par le principe des équations différentielles dans le cas où le

(1) Pour l'équation du mouvement autour du centre de gravité, voir J.-L. DESTOUCHES, *Définition et propriétés du centre de gravité en Mécanique ondulatoire* (*J. Phys. Rad.*, 7^e série, t. 5, 1934, p. 320-328, et t. 6, 1935, p. 329-335).

(2) L. DE BROGLIE, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire* (Gauthier-Villars, Paris, 1956), p. 151 et suiv.

mouvement est rapporté à un repère commutatif et où les forces dérivent d'une fonction de forces $U(M_1, \dots, M_n; t)$, prennent la forme

$$\frac{dq_i}{dt} = q'_i, \quad \frac{dq'_i}{dt} = \Phi_i(q_1, \dots, q_{3N}; q'_1, \dots, q'_{3N}; t),$$

en posant

$$\begin{aligned} q_1 &= d\mathbf{x}_1, & q_2 &= d\mathbf{y}_1, & q_3 &= d\mathbf{z}_1, & \dots, \\ q_{3p+1} &= d\mathbf{x}_{p+1}, & q_{3p+2} &= d\mathbf{y}_{p+1}, & q_{3p+3} &= d\mathbf{z}_{p+1}, & \dots \\ q'_1 &= d\mathbf{v}_{x,1}, & q'_2 &= d\mathbf{v}_{y,1}, & q'_3 &= d\mathbf{v}_{z,1}, & \dots, & q'_{3p+1} &= d\mathbf{v}_{x,p+1}, & \dots \end{aligned}$$

et l'on a d'après la définition d'une fonction de forces

$$m_{i-1} = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

On peut appeler *fonction de Lagrange* l'expression

$$\mathfrak{L} = d\mathfrak{E} + U.$$

On définit les *moments conjugués* p_i par

$$p_i = d \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q'_i}.$$

On voit alors que les p_i sont les composantes des quantités de mouvement avec le choix fait pour les q_i .

La fonction hamiltonienne $\mathfrak{H}$ se définira par

$$\mathfrak{H} = d \sum_i q'_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q'_i} - \mathfrak{L}.$$

et le système différentiel prend la forme

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_i}$$

et dans ce cas on a des équations canoniques.

Si la fonction U est indépendante du temps, il y a une intégrale des forces vives qui prend ici la forme

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E}.$$

21. Crochets de Poisson. — D'après ce que nous avons vu au chapitre précédent, la différentielle totale $d\mathfrak{E}$ d'une fonction des variables q_i et p_i se met sous la forme

$$d\mathfrak{E} = \chi(p_i, q_i; t; dp_i, dq_i; dt) = \chi_1(p_i, q_i; t; dp_i, dq_i) + \chi_2(p_i, q_i; t; dt),$$

on a en vertu de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \chi(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; \mathfrak{p}'_i, \mathfrak{q}'_i, \mathbf{1}) = \chi_1(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; \mathfrak{p}'_i, \mathfrak{q}'_i) + \chi_2(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; \mathbf{1})$$

et, d'autre part,

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} = \chi(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; 0, 0, \mathbf{1}) = \chi_2(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; \mathbf{1}).$$

En vertu des équations canoniques, nous pouvons remplacer les $\mathfrak{p}'_i$ et $\mathfrak{q}'_i$ par leurs expressions tirées de ces équations. L'équation des intégrales premières prend alors la forme

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} + \chi_1\left(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{q}_i}, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_i}\right) = 0.$$

Nous appellerons *crochet de Poisson* de deux fonctions $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ des $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i, t$ l'expression

$$[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] = \chi_1\left(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; -\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \mathfrak{q}_i}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \mathfrak{p}_i}\right) \quad (\text{fonction } \chi_1 \text{ pour } \mathfrak{G}),$$

où

$$d\mathfrak{G} = \chi_1(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; d\mathfrak{p}_i, d\mathfrak{q}_i) + \chi_2(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i; t; dt)$$

alors, avec cette définition on voit que l'équation aux intégrales premières prend la forme

$$(6) \quad \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} + [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] = 0.$$

Si $\mathfrak{G}$ ne dépend pas directement du temps, elle sera intégrale première si

$$[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] = 0.$$

On voit aussi que

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}].$$

Si en particulier on pose $\mathfrak{G} = \mathfrak{p}_i$ ou $\mathfrak{G} = \mathfrak{q}_i$, on a donc

$$\mathfrak{q}'_i = [\mathfrak{q}_i, \mathfrak{H}], \quad \mathfrak{p}'_i = [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{H}]$$

et ceci s'identifie avec les équations canoniques.

Dans le cas de commutation ces crochets de Poisson prennent la forme des crochets de Poisson classiques.

22. Condition de prévision. — Les intégrales premières ont été définies ici d'une façon purement formelle comme quantités dont la

dérivée totale par rapport au temps est nulle. Mais on définit en théorie générale des prévisions une intégrale première $\mathfrak{G}$ par la condition

$$\mathfrak{G}(t) \cdot \mathfrak{U}(t, t_0) = \mathfrak{U}(t, t_0) \cdot \mathfrak{G}(t_0).$$

Pour que les prévisions soient en accord avec la persistance des structures formelles, il faut poser que toute intégrale première au sens formel le soit aussi au sens de la théorie des prévisions. Ceci constitue un postulat supplémentaire :

POSTULAT DE PRÉVISIONS. — *Toute intégrale première au sens formel est aussi intégrale première au sens prévisionnel.*

Supposons maintenant que $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{U}$ admettent des dérivées partielles par rapport au temps. Alors en remplaçant $\mathfrak{A}_0$ par son expression à partir de $\mathfrak{A}$, il vient après dérivation :

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \cdot \mathfrak{U}^{-1} \cdot \mathfrak{G} - \mathfrak{G} \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \cdot \mathfrak{U}^{-1}.$$

Posons

$$(7) \quad \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \cdot \mathfrak{U}^{-1},$$

alors

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} = \mathfrak{H} \mathfrak{G} - \mathfrak{G} \mathfrak{H}.$$

En nous reportant à l'expression de l'équation aux intégrales premières formelles, on voit que l'identification des deux conditions des intégrales premières exige qu'on ait

$$(8) \quad [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] = \mathfrak{G} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \mathfrak{G}$$

[$\mathfrak{H}$ n'est pas ici défini comme hamiltonien, mais uniquement par la relation (7)].

23. La condition quantique. — Jusqu'ici nous avons seulement affaibli la structure formelle de la Mécanique classique pour constituer une Mécanique opératorielle qui contient ce qui subsiste de Mécanique classique en Mécanique ondulatoire. Nous n'avons introduit aucun élément positif et la Mécanique classique est une réalisation particulière de cette Mécanique opératorielle. Mais cette réalisation sera exclue par l'introduction de la condition quantique de Heisenberg où interviennent la constante de Planck et des non-commutations. Si l'on admet cette

condition supplémentaire, on constitue une théorie plus forte qui n'admet pas la Mécanique classique comme réalisation tout en constituant une théorie partielle de la Mécanique ondulatoire. Nous admettons donc ce postulat :

POSTULAT QUANTIQUE. — *Entre une coordonnée cartésienne q_j d'un corpuscule d'un système dont le mouvement est rapporté au repère fondamental et la composante correspondante de la quantité de mouvement p_j , on a les relations*

$$p_j p_k = p_k p_j; \quad q_j p_j - p_j q_j = i\hbar; \quad q_j p_k - p_k q_j = 0 \quad (j \neq k);$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, et h est la constante de Planck.

24. Conséquences de la condition quantique. — Tout d'abord on voit qu'on a entre q_j et p_j les relations suivantes (pour simplifier l'écriture, nous omettons les indices) :

$$qp^2 - p^2q = 2i\hbar p; \quad q^2p - p q^2 = 2i\hbar q;$$

par récurrence on vérifie que

$$qp^n - p^n q = ni\hbar p^{n-1} = i\hbar \frac{\partial p^n}{\partial p}$$

et

$$q^n p - p q^n = ni\hbar q^{n-1} = i\hbar \frac{\partial q^n}{\partial q}.$$

D'autre part,

$$q\mathfrak{H} - \mathfrak{H}q = \frac{1}{2m}(qp^2 - p^2q) = \frac{i\hbar}{m}p = i\hbar \frac{dq}{dt} = i\hbar [q, \mathfrak{H}]$$

et par récurrence

$$i\hbar \frac{dq^n}{dt} = q^n \mathfrak{H} - \mathfrak{H} q^n = i\hbar [q^n, \mathfrak{H}],$$

ensuite

$$i\hbar \frac{dq^{-1}}{dt} = -q^{-1} \frac{dq}{dt} q^{-1} = q^{-1} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} q^{-1}.$$

Alors par récurrence sur la construction des expressions, on a

$$i\hbar \frac{d\mathcal{F}(q)}{dt} = \mathcal{F}(q) \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \mathcal{F}(q) = i\hbar [\mathcal{F}(q), \mathfrak{H}]$$

et d'autre part

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} = \mathcal{F}p - p\mathcal{F}, \quad i\hbar \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = q\mathcal{F} - \mathcal{F}q.$$

Par suite

$$\mathfrak{p}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\mathfrak{p} = -i\hbar \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{q}} = i\hbar \frac{d\mathfrak{p}}{dt},$$

par récurrence, on aura

$$i\hbar \frac{d\mathfrak{p}^n}{dt} = \mathfrak{p}^n \mathfrak{H} - \mathfrak{H}\mathfrak{p}^n = i\hbar [\mathfrak{p}^n, \mathfrak{H}]$$

et de même pour $n = -1$; par récurrence sur la construction des expressions

$$i\hbar \frac{d\mathfrak{F}(\mathfrak{p})}{dt} = \mathfrak{F}(\mathfrak{p}) \mathfrak{H} - \mathfrak{H}\mathfrak{F}(\mathfrak{p}) = i\hbar [\mathfrak{F}, \mathfrak{H}].$$

Enfin par une nouvelle récurrence sur la construction des expressions, on arrivera à la formule précédente pour une fonction $\mathfrak{F}$ des $\mathfrak{q}_j$ et des $\mathfrak{p}_j$, d'où finalement ce théorème :

THÉOREME. — *Du postulat quantique, il découle que pour un système de corpuscules obéissant aux équations canoniques, on a pour un opérateur $\mathfrak{F}$, la relation*

$$i\hbar [\mathfrak{F}, \mathfrak{H}] = \mathfrak{F}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\mathfrak{F}.$$

Ce théorème s'établit à partir du postulat quantique sans qu'il soit nécessaire de préciser la forme analytique des opérateurs $\mathfrak{p}_j$ et $\mathfrak{q}_j$. Il explique pourquoi en Mécanique ondulatoire les crochets de Poisson prennent la forme simple $-\frac{i}{\hbar} (\mathfrak{F}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\mathfrak{F})$. Au lieu de prendre ceci comme définition des crochets de Poisson (comme on le fait habituellement à la suite de Dirac), on montre ici à partir d'une définition générale des dérivées et différentielles, que cette expression particulière est une conséquence de la condition quantique.

Si l'on tient compte de la condition sur les prévisions et de l'équation (8), le théorème précédent nous impose

$$[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] = -\frac{i}{\hbar} (\mathfrak{G}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\mathfrak{G}$$

et ceci pour toute intégrale première. On peut alors poser

$$\mathfrak{C} = -\frac{i}{\hbar} \mathfrak{H} + \mathfrak{K}$$

et l'on a

$$\mathfrak{G}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{G}$$

pour toute intégrale première et l'on a d'autre part une équation d'évolution qui résulte de (7), d'où

THÉOREME. — *Si un système de corpuscules obéit à des équations canoniques et satisfait à la condition quantique, alors l'opérateur d'évolution satisfait à l'équation*

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = \left(-\frac{i}{\hbar} \mathfrak{H} + \mathfrak{K} \right) \mathfrak{U},$$

où $\mathfrak{K}$ est un opérateur qui commute avec toutes les intégrales premières.

On peut alors montrer que dans un grand nombre de cas l'opérateur $\mathfrak{K}$ se réduit à la multiplication par une constante, or comme $\mathfrak{H}$ est défini à une constante additive près, on peut poser $\mathfrak{K} = 0$. Pour l'établir, on remarque que toute fonction propre d'une intégrale $\mathfrak{G}$ sera fonction propre de $\mathfrak{K}$. Si alors on connaît des intégrales $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_k$ qui ne commutent pas toutes deux à deux, toute fonction propre d'une intégrale première est fonction propre de $\mathfrak{K}$. Si les fonctions propres forment un ensemble convenablement distribué, il en résulte que toute fonction d'onde est fonction propre de $\mathfrak{K}$ et par suite $\mathfrak{K}$ est une constante. La constance de $\mathfrak{K}$ dépend donc des propriétés des intégrales premières.

On voit ainsi que l'existence d'une équation d'ondes est une conséquence des équations canoniques opératorielles et de la condition quantique. Si l'on pose $\hbar = 0$, alors toutes les variables commutent entre elles et l'on retombe sur la Mécanique classique. Au point de vue purement formel, on pourrait poser bien d'autres conditions que la condition quantique pourvu qu'il y ait des non-commutations; on aurait alors d'autres formes de Mécanique opératorielle. Mais l'adéquation à l'expérience exige la relation quantique et celle-ci a la forme la plus simple pour introduire des non-commutations.

24. Systèmes non canoniques. — Ce qui précède montre que pour les systèmes obéissant à des équations canoniques, on obtient bien, par notre méthode de définition des dérivées, les formules fondamentales de la Mécanique ondulatoire usuelle. On obtient donc un rapprochement satisfaisant de la Mécanique classique et de la Mécanique ondulatoire; on voit ainsi clairement d'une part ce qui subsiste de la structure de la Mécanique classique et d'autre part la structure nouvelle qu'on introduit par la condition quantique.

Mais l'intérêt principal de la méthode que nous avons suivie est de permettre une extension de la Mécanique ondulatoire au cas d'un système n'obéissant pas à des équations canoniques. Tout d'abord, nous pouvons écrire entre les corpuscules d'un tel système, les équations fondamentales opératorielles

$$m_j \Gamma_j = \mathcal{F}_j.$$

ensuite nous pouvons appliquer la théorie des intégrales premières. Enfin on peut ajouter la condition quantique si l'on veut, mais il n'y a pas d'opérateur hamiltonien, donc pas d'intégrale première des forces vives ni d'équation différentielle d'évolution pour l'opérateur $\mathbf{U}$.

Un système non canonique s'étudiera donc par la méthode des intégrales premières. En Mécanique opératorielle comme en Mécanique classique, on exprime qu'une grandeur $\mathcal{F}$ est intégrale première en annulant sa dérivée totale, et comme toute propriété des dérivées opératorielles est aussi une propriété des dérivées de fonctions numériques, on a

THÉORÈME. — *Toute intégrale première de la Mécanique ondulatoire est intégrale première dans le problème correspondant de la Mécanique classique, même dans le cas d'un système non canonique* ⁽¹⁾.

La réciproque n'est pas vraie parce que : 1° une expression $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ peut être nulle si tous les facteurs commutent et ne plus l'être avec les non-commutations; 2° en Mécanique classique, on considère des intégrales premières (en général multiformes) qui sont des fonctions transcendantes des q_i et p_i auxquelles il ne peut pas correspondre en Mécanique ondulatoire un opérateur de l'ensemble E d'opérateurs que l'on considère.

On remarquera aussi que des intégrales premières, distinctes en Mécanique opératorielle, peuvent cesser de l'être en Mécanique classique par suite des commutations. De même si l'on accepte la condition quantique, des intégrales premières qui contiennent $\hbar$ auront leurs termes où figure cette constante qui s'annuleront à l'approximation classique, et des intégrales qui étaient distinctes pourront alors cesser de l'être.

Pour trouver des intégrales premières, on pourra donc opérer ainsi :

(¹) F. DESTOUCHES-AESCHLIMANN, *Intégrales opératorielles et extension de la Mécanique ondulatoire* (C. R. Acad. Sc., t. 236, 1953, p. 1140).

on considérera le système correspondant en Mécanique classique, c'est-à-dire le système obéissant aux équations de même forme que celles du système de corpuscules considéré, et l'on cherchera les intégrales premières de ce système classique; on examinera alors quelles sont parmi ces intégrales celles qui donnent lieu à des intégrales opératorielles.

On peut aussi chercher directement des intégrales premières opératorielles en cherchant des solutions de l'équation aux intégrales premières.

Par exemple, dans un mouvement à une dimension, si l'on a

$$\mathcal{F} = -k v^2,$$

on aura les intégrales

$$\begin{aligned} (kt \bullet + a)v &= m, \\ \tau - \frac{m}{k} \text{Log}(kt \bullet + a) &= b. \end{aligned}$$

La même méthode s'applique au cas d'une force en v^n (n entier positif quelconque).

Mais pour montrer l'intérêt de cette méthode, il est important de traiter un cas physique effectivement rencontré.

26. Théorie des expériences de Maurice de Broglie et de Millikan ⁽¹⁾. — Un cas physiquement intéressant est celui de l'expérience de Maurice de Broglie ou de celle de Millikan décrit par la Mécanique ondulatoire étendue selon la méthode précédente en se limitant à l'approximation où la particule chargée est assimilée à son centre de gravité et où l'on tient compte de l'effet moyen des molécules du gaz par la loi de Stokes corrigée ⁽¹⁾. On aura comme équations

$$m \frac{d\mathcal{V}}{dt} = (\varepsilon E - mg) \mathbf{Z} \bullet - k \mathcal{V} \quad \left(k = \frac{6\pi a^2 \eta}{1 + \frac{L}{a}} \right),$$

ε est la charge, E le champ électrique, g l'intensité de la pesanteur, $\mathbf{Z}$ le vecteur unitaire de la verticale ascendante, k le coefficient fixé par

⁽¹⁾ J. PERRIN, *Les atomes* (Alcan, Paris, 1927), p. 245-251.

la loi de Stokes corrigée. Les trois variables se séparent et l'on a les intégrales

$$\begin{aligned}mv_x + kx &= a_1, & mv_y + ky &= a_2, \\mv_z + k\zeta - (\varepsilon E - mg)t \bullet &= a_3, \\x - b_1 e^{-\frac{k}{m}t} - a_1 k^{-1} &= 0, \\y - b_2 e^{-\frac{k}{m}t} - a_2 k^{-1} &= 0, \\\zeta - b_3 e^{-\frac{k}{m}t} - k^{-1}(\varepsilon E - mg)(t - mk^{-1}) \bullet - a_3 k^{-1} &= 0.\end{aligned}$$

Sur ces relations, on voit que si le temps augmente indéfiniment, on a, quelles que soient les conditions initiales

$$\begin{aligned}x_\infty - a_1 k^{-1} &= 0, & y_\infty - a_2 k^{-1} &= 0, \\ \zeta_\infty - k^{-1}(\varepsilon E - mg)(t - mk^{-1}) \bullet - a_3 k^{-1} &= 0, \\ v_{x,\infty} &= 0, & v_{y,\infty} &= 0, & v_{z,\infty} &= k^{-1}(\varepsilon E - mg).\end{aligned}$$

On retrouve donc ici les mêmes résultats qu'en Mécanique classique et l'on peut appliquer les formules limites précédentes dans les mêmes conditions. Pour avoir des indications plus précises sur ce mouvement, il faudrait calculer effectivement les fonctions d'onde, et alors les conditions aux limites fixées par les armatures du condensateur viendraient imposer des conditions aux valeurs propres des opérateurs a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 (quantification), mais la valeur limite pour la vitesse qui seule intervient dans l'expérience considérée est indépendante de ces opérateurs et les formules classiques de l'expérience de Millikan demeurent valables quand on traite le problème en Mécanique ondulatoire ainsi étendue. Ceci montre que les méthodes opératoriels n'ont pas seulement un intérêt formel, mais aussi un intérêt physique puisqu'elles permettent d'aborder des problèmes qui sont inaccessibles aux méthodes usuelles de la Mécanique ondulatoire.

CHAPITRE IV

LA MÉTHODE DES MOUVEMENTS ASSOCIÉS

1. **Systèmes associés.** — La méthode de la Dynamique opératoire étudiée au chapitre précédent nous permet de décrire tout ce qui est commun à la Mécanique ondulatoire et à la Mécanique classique. Notamment, nous obtenons ainsi les intégrales premières communes qui apparaissent lors de l'étude d'un système S de corpuscules. Mais cette méthode ne nous fournit aucune indication sur les mouvements des systèmes étudiés.

On peut se demander si, de l'étude d'un mouvement de Mécanique classique, on ne pourrait pas tirer des indications pour l'étude d'un mouvement de Mécanique ondulatoire et réciproquement. C'est ce que nous nous proposons d'esquisser ici en donnant quelques indications sur une méthode que nous appellerons *méthode des mouvements associés*.

Soit un système S de corpuscules obéissant à des équations canoniques, c'est-à-dire obéissant à une équation d'ondes. Nous appellerons mouvement de ce système, toute solution acceptable Ψ de l'équation d'ondes.

Un mouvement sera représenté par une courbe dans l'espace (H) des fonctions d'ondes (espace de Hilbert) qui sera la trajectoire décrite par la fonction Ψ au cours de son évolution. Une telle trajectoire est définie par la donnée d'une fonction d'onde initiale Ψ_0 .

A ce système S de corpuscules, nous pouvons associer un système S_c de points matériels de la Mécanique classique en imposant à S_c d'avoir même forme pour la fonction hamiltonienne que l'opérateur hamiltonien de S et de satisfaire aux mêmes conditions accessoires, notamment aux mêmes conditions de liaisons.

Nous appellerons *mouvement* du système S_c toute solution des équations canoniques. Si le système S_c est à n degrés de liberté, un mouvement sera représenté par une courbe dans l'extension en phase (Ω) de S_c qui sera un espace à $2n$ dimensions. Cette courbe sera la trajectoire du point figuratif de S_c dans l'espace (Ω). Une telle trajectoire est caractérisée par la donnée du point figuratif initial P_0 .

Inversement, à un système canonique S_c de la Mécanique classique, nous pouvons associer un système S de corpuscules de la Mécanique ondulatoire en lui imposant d'avoir même forme pour l'opérateur hamiltonien de S que pour la fonction hamiltonienne de S_c , mêmes conditions de liaisons (s'il y en a), mêmes conditions accessoires.

Deux systèmes tels que S et S_c seront dits *systèmes associés*.

La méthode de la Dynamique opératorielle permet de décrire exactement cette association. Notamment, on peut associer les intégrales premières de ces deux systèmes.

2. Mouvements classiques associés. — Un mouvement du système S en Mécanique ondulatoire est fixé par la donnée de la valeur d'une grandeur complète (correspondant à une observation maximale). Cette donnée détermine en effet une et une seule fonction d'onde Ψ_0 .

Un mouvement du système S_c en Mécanique classique est fixé par la donnée du point figuratif initial P_0 dans l'extension en phase (Ω). Il faut donner la valeur des coordonnées q_i et des moments conjugués p_i (ou des vitesses) à l'instant initial ou se donner la valeur d'un système de grandeurs tel qu'on en tire les valeurs initiales des q_i et p_i .

A un mouvement du système S en Mécanique ondulatoire déterminé par une fonction d'onde initiale Ψ_0 , donc déterminé par la valeur g d'une grandeur complète G , nous conviendrons d'associer l'ensemble des mouvements du système S_c déterminé par la valeur correspondante : même valeur g de la même grandeur G . En Mécanique classique, à cette valeur g de la grandeur G correspond une variété $\mathcal{M}_{g,g}$ à n dimensions dans l'extension en phase (Ω). Cette variété détermine un ensemble de mouvements : l'ensemble des mouvements figurés par des points P qui à l'instant initial t_0 sont situés sur la variété $\mathcal{M}_{g,g}$. Cet ensemble de mouvements sera appelé *ensemble des mouvements classiques associés au mouvement quantique caractérisé par la fonction d'onde initiale Ψ_0* .

Cette association de mouvement entre S et S_c peut être étendue à des ensembles de mouvements de la façon suivante : A un ensemble E de mouvements de S , nous associerons l'ensemble E_c des mouvements classiques de S_c obtenu en prenant la réunion des ensembles de mouvements associés à chaque mouvement de E .

3. Mouvements quantiques associés. — Le mouvement du système classique S_c est régi par une équation de Jacobi. A chaque fonction d'onde Ψ_0 de S , on peut associer une fonction de Jacobi Φ en fixant à Φ

les mêmes conditions initiales qu'à Ψ . C'est-à-dire que la fonction de Jacobi à l'instant initial t_0 définira une variété $\Phi_0 = \text{Cte}$ qui serait identifiée avec $\mathcal{M}_{t_0, g}$. Réciproquement à une fonction de Jacobi, nous associerons une fonction d'onde Ψ_0 définie par les mêmes conditions initiales.

A un ensemble de mouvements classiques de S_c caractérisé par une fonction de Jacobi bien déterminée Φ , nous associerons le mouvement quantique défini par la fonction correspondante (fonction admettant les mêmes conditions initiales).

A un mouvement classique, nous conviendrons d'associer l'ensemble des fonctions de Jacobi Φ telles que ce mouvement appartienne à toutes les classes de mouvements définies par ces fonctions Φ , et à cet ensemble de fonctions Φ l'ensemble des fonctions Ψ correspondantes.

A un ensemble E_c des mouvements classiques, nous associerons l'ensemble des fonctions Φ telles que tout mouvement de E_c appartienne à la classe des mouvements définis par une fonction Φ et l'ensemble des fonctions d'onde Ψ correspondant à ces fonctions Φ , soit

$$\begin{aligned} C_\Phi &\Rightarrow (\Phi_0), \\ (P_0) &\Rightarrow \bigcap_{\Psi_0} \{ \Psi_0 \Leftrightarrow \Phi \ \& \ P_0 \in C_\Phi \}, \\ \exists \Phi. \quad E_c \subset C_\Phi &\Rightarrow \left[E_c \Rightarrow \bigcap_{\Psi} \{ \Psi_0 = \Psi(t_0) \} \right]. \end{aligned}$$

Enfin si l'ensemble E_c n'est pas contenu dans une classe C_Φ , nous décomposerons E_c en classes de la façon suivante : on prendra l'intersection de E_c avec des classes C_Φ soit $E_{c\Phi} = E_c \cap C_\Phi$, à chaque $E_{c\Phi}$ on associera des fonctions Ψ_0 par la règle précédente et l'on prendra la réunion des fonctions Ψ associées à chaque $E_{c\Phi}$.

Les mouvements quantiques ainsi définis seront dits *mouvements quantiques associés* à un ensemble de mouvements classiques du système S . Dans l'association inverse, on aurait

$$\begin{aligned} (\Psi_0) &\Rightarrow C_\Phi = \mathcal{M}_{t_0, g}, \\ E &\Rightarrow \bigcup_{\Phi} C_\Phi, \end{aligned}$$

avec Φ associé aux $\Psi \in E$.

Par des règles de ce genre, à chaque ensemble de mouvements de S se trouve associé d'une certaine façon un ensemble de mouvements de S_c et à chaque ensemble de mouvements de S_c se trouve associé d'une certaine façon un ensemble de mouvements de S (mais il n'y a pas correspondance individuelle entre les mouvements).

4. **Équation d'onde et équation de Jacobi.** — L'association des mouvements résulte en somme d'associations de solutions d'équations d'ondes à des solutions de l'équation de Jacobi correspondante. Naturellement fonction d'onde Ψ et fonction de Jacobi Φ n'ont pas les mêmes propriétés puisqu'elles obéissent à des équations différentes. Mais en certains cas, on pourra établir des relations entre propriétés des mouvements quantiques et propriétés des mouvements classiques et c'est ce qui fera l'intérêt de la méthode des mouvements associés. L'équation de Jacobi de S_c a la forme

$$\sum_i \frac{1}{2m_i} (\text{grad}_i \Phi)^2 + V - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

et l'équation d'ondes de S a la forme

$$\left(\sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + V \right) \Psi + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

Si l'on sépare pour Ψ partie réelle et partie imaginaire en posant

$$\Psi = ae^{ik\varphi}, \quad k = \frac{1}{\hbar},$$

alors la fonction φ satisfait à l'équation

$$\sum_i \frac{1}{2m_i} (\text{grad}_i \varphi)^2 + V + Q - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

On voit donc que la phase φ de l'onde Ψ satisfait à une équation de même forme que l'équation de Jacobi et n'en diffère que par le terme Q , potentiel quantique qui dépend de a et de ses dérivées.

Quand l'effet du terme Q est négligeable, l'approximation de l'optique géométrique est valable; alors à une fonction d'onde Ψ de S correspond dans ce cas une classe C_Φ de mouvements classiques et les fonctions φ et Φ sont pratiquement égales. Dans ce cas les mouvements classiques associés renseignent donc exactement sur les propriétés du mouvement quantique.

D'autre part Bohr a remarqué que pour les grands nombres quantiques d'un système quantifié, les mouvements quantifiés tendent vers des mouvements classiques.

Le théorème d'Ehrenfest ⁽¹⁾ de plus exprime qu'en moyenne (moyenne

(1) G. BODIOLU, *Recherches sur les fondements du calcul quantique des probabilités dans les cas purs (Espace de Hilbert, principe d'ondulisation)*. Thèse, Paris, 1949 (*Annales de Physique*, 1950).

prise d'une certaine façon) les équations classiques sont satisfaites. En somme l'ensemble C_Φ des mouvements classiques associés à une fonction Ψ décrit un comportement moyen des corpuscules.

5. Intervention de la théorie de la double solution. — Ceci se trouve précisé en théorie de la double solution de M. Louis de Broglie, au moins dans le cas d'un corpuscule unique, car à toute fonction Ψ on associe une fonction u décrivant le corpuscule. On pose

$$u = f e^{ik\varphi}$$

et f possède une singularité qui représente le corpuscule.

Cette fois le corpuscule est représenté par un point matériel obéissant à l'équation de Jacobi en φ , il est soumis à un potentiel quantique supplémentaire Q qui dépend de f et de Δf par

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta f}{f}.$$

En somme le point matériel est soumis à des forces extérieures Q dérivant d'un champ sur lequel il réagit. On a

$$\frac{\partial f^2}{\partial t} + \operatorname{div} \left(-\frac{1}{m} f^2 \operatorname{grad} \varphi \right) = 0.$$

Si le potentiel quantique Q est très petit, la trajectoire du corpuscule est très voisine d'une trajectoire classique.

Si Q est petit mais non négligeable, il peut être traité comme une perturbation. Des propriétés du système non perturbé on peut déduire des propriétés du système perturbé si la perturbation satisfait à certaines conditions. Il suffit d'appliquer les théorèmes connus de Mécanique classique.

Si Q est grand, il n'y a pas de relation simple entre trajectoire classique et trajectoire quantique, cependant en certains cas on peut établir des relations qualitatives.

6. Propriétés des spectres discontinus. — Sans donner de démonstrations précises qui nous entraîneraient trop loin, donnons quelques exemples de propriétés résultant de la méthode des mouvements associés. Dans tout ce qui suit, nous considérerons des systèmes classiques S_c ou quantiques S qui seront conservatifs.

Tout d'abord, si un système S de Mécanique ondulatoire a une partie de son spectre d'énergie discontinue, alors compte tenu de la remarque

de Bohr que pour les grands nombres quantiques on s'approche des propriétés classiques, on peut établir ceci :

L'ensemble de mouvements S_c associés à une fonction propre Ψ_i d'un spectre discontinu d'énergie est un ensemble de mouvements dont les trajectoires sont tout entières contenues à distance finie.

Ceci a lieu aussi bien pour les trajectoires considérées dans l'extension en phase que pour celles de l'espace de configuration.

7. Propriétés des spectres continus. — Si une partie du spectre d'énergie d'un système S est continue, alors dans ce cas on n'a pas à proprement parler des ondes stationnaires comme dans le cas discontinu, mais des ondes un peu analogues à des ondes planes en propagation.

Dans ce cas lorsqu'un corpuscule s'éloigne indéfiniment, les forces auxquelles il est soumis tendent vers zéro et l'on peut les assimiler en première approximation à zéro, en seconde approximation à des forces centrales issues d'un point moyen et dépendant de la distance et de l'orientation. On aura un comportement asymptotique qui tendra vers celui d'un système de deux corps; on peut alors établir ce résultat qui complète le précédent :

Les mouvements classiques associés à des mouvements quantiques à spectre continu ont des trajectoires qui ne sont pas entièrement contenues à distance finie.

Par exemple dans les problèmes de chocs ou de diffusion, certains corpuscules ont des trajectoires classiques associées qui ont deux branches s'éloignant à l'infini, dans le passé et dans l'avenir, et qui sont asymptotiques à des branches d'hyperboles.

8. Conséquences des propriétés précédentes. — Les conséquences des deux propriétés précédentes sont aisément utilisables. Comme les systèmes de Mécanique classique ont été étudiés beaucoup plus à fond que les systèmes de Mécanique ondulatoire, des propriétés du système classique, on pourra tirer des propriétés du système quantique associé. Dans d'autres cas il sera plus facile de démontrer des propriétés en Mécanique ondulatoire et l'on pourra en déduire par approximation d'optique géométrique, des propriétés du système classique associé :

Si un système classique S_c n'a pas de trajectoires entièrement

situées à distance finie, le système quantique associé S a un spectre d'énergie entièrement continu.

De même on tire de la seconde propriété :

Si un système mécanique classique S_c a toutes ses trajectoires entièrement situées à distance finie, le système quantique associé S a un spectre d'énergie entièrement discontinu.

Par suite :

Si un système classique S_c a des trajectoires, les unes situées entièrement à distance finie, les autres pouvant s'éloigner à l'infini, le système quantique associé S a un spectre mixte, en partie continu, en partie discontinu.

9. Propriétés limites. — On peut parvenir à des propriétés plus fortes : Tout d'abord, si l'on peut classer les trajectoires du système S_c en trajectoires entièrement situées à distance finie et en trajectoires s'éloignant à l'infini, selon la valeur de la constante des forces vives E (d'autres paramètres demeurant fixés) alors la même classification est valable pour le système quantique associé S . Les valeurs de E correspondant à des mouvements limites séparant pour S_c des trajectoires des deux catégories sont des points d'accumulation du spectre d'énergie du système quantique associé, et ce sont des valeurs limites séparant une partie continue d'une partie discontinue du spectre.

La propriété inverse est aussi valable :

Si E est point d'accumulation du spectre d'énergie d'un système quantique S , cette valeur sépare une partie continue d'une partie discontinue du spectre, et pour le système associé caractérise des mouvements limites séparant des mouvements à trajectoires demeurant à distance finie de mouvements s'éloignant à l'infini.

10. Conséquences de propriétés des trajectoires. — Considérons un système classique S_c , alors si l'on démontre que S_c possède des mouvements périodiques, c'est-à-dire des trajectoires fermées dans l'extension en phase, même si ces mouvements sont exceptionnels, il en résultera qu'il existe des mouvements entièrement à distance finie, donc le système quantique associé S aura un spectre d'énergie comprenant une partie discontinue, d'où :

Si un système classique S_c admet au moins un mouvement périodique, le système quantique associé a un spectre en partie discontinu.

De même si l'on établit qu'un système classique S_c admet au moins une trajectoire qui a deux branches infinies correspondant à $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$, alors le système quantique associé aura une partie continue dans son spectre d'énergie.

Si un système classique S_c admet au moins une trajectoire ayant deux branches infinies, le système quantique associé a un spectre en partie continu.

11. Autres types de propriétés. — On pourrait rechercher d'autres propriétés analogues. Par exemple : si un système classique S_c admet un mouvement classique séparant deux classes de mouvements, alors la valeur E de l'énergie de ce mouvement limite est point d'accumulation du spectre de l'énergie du système quantique S associé.

D'autres types de propriétés des trajectoires résultent de l'existence d'intégrales premières. Par exemple, les propriétés résultant de l'existence d'une intégrale première quadratique distincte de l'intégrale de l'énergie se répercutent sur le système quantique associé.

A la stabilité d'un équilibre pour S_c (théorème de Lejeune-Dirichlet) et aux petits mouvements autour d'une position d'équilibre correspondent pour S des petits mouvements qu'on peut représenter par un oscillateur harmonique à un nombre de degrés de liberté fixé par le nombre de dimensions de la surface définie par le potentiel V . Donc

Si S_c admet une position d'équilibre stable, une partie du spectre de S est discontinue et dans cette partie discontinue on peut distinguer un groupe de niveaux dont les premiers sont très voisins de ceux d'un oscillateur harmonique.

D'autres propriétés résultent de propriétés globales comme celle de la transitivité métrique ou de l'intransitivité métrique ; à la transitivité métrique de S_c correspond la non-dégénérescence du spectre d'énergie de S ⁽¹⁾.

Tout un domaine de recherches se trouve donc caractérisé par la méthode des mouvements associés. Ce domaine prend d'ailleurs un intérêt plus grand avec la théorie de la double solution qui conduit à rapprocher la Mécanique ondulatoire de la Mécanique classique. Nous nous bornerons ici à ces indications sommaires pour revenir à l'étude de la notion même de système physique.

(¹) Cf. JANCEL, *Thèse*, Paris, 1957.

TROISIÈME PARTIE

THÉORIE FONCTIONNELLE DES CORPUSCULES

CHAPITRE I

REPRÉSENTATION DES CORPUSCULES

1. **La théorie de la double solution.** — En 1926 et 1927, dans une série de Notes et de Mémoires, M. Louis de Broglie ⁽¹⁾ a développé une très ingénieuse conception de la Mécanique ondulatoire sous le nom de « théorie de la double solution » ; mais des difficultés sérieuses l'ont conduit ⁽²⁾ à abandonner cette théorie dès la fin de 1927. Actuellement les recherches entreprises pour obtenir une théorie meilleure que la Mécanique ondulatoire habituelle ont ramené l'attention sur cette conception ⁽³⁾.

Pour essayer de lever certaines des difficultés qui se présentent, il nous semble qu'il faut attaquer la question d'une autre façon, en analysant les notions fondamentales concernant la représentation physique des corpuscules et des systèmes avec pour guide quelques considérations générales.

⁽¹⁾ L. DE BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1926, p. 447 ; t. 184, 1927, p. 273 ; t. 185, 1927, p. 380 ; *J. Phys. Rad.*, t. 7, 1927, p. 235.

⁽²⁾ L. DE BROGLIE, *Rev. Métaphysique et Morale*, 1941, p. 1 ; *Physique et Microphysique* (Albin Michel, Paris, 1947), p. 163-190.

⁽³⁾ L. DE BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 641 et 1013 ; t. 234, 1952, p. 265 ; J.-P. VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 1010 ; J. L. DESTOUCHES, Conférence au Séminaire de Physique théorique de l'Université de Turin, mars 1952.

2. La notion d'espace. La formation des connaissances géométriques du lycéen est initialement de type expérimental : elle est réalisée par le dessin, prolongée ensuite par schématisation et abstraction et conduit ainsi l'élève à considérer la géométrie euclidienne (qu'il étudie ensuite de façon purement rationnelle fondée sur l'évidence) comme parfaitement adéquate à l'expérience géométrique. Or, on sait que cette adéquation cesse d'avoir lieu dès qu'interviennent des exigences relativistes.

L'expérience ne suffit pas pour la détermination de l'espace physique, car elle laisse des éléments indéterminés par suite de l'imprécision limitée de toute mesure. Un espace est acceptable comme espace physique pour autant que ses propriétés respectent l'organisation du quasi-espace défini par les expériences géométriques avec leur précision limitée et une fois fixé par quels ensembles sont représentés les éléments physiques. D'une façon plus précise, un espace abstrait ($\mathcal{A}$) au sens de Fréchet ⁽¹⁾ devient un espace physique si sa topologie respecte l'organisation du quasi-espace défini par les deux conditions suivantes : 1° on a précisé par quels ensembles de l'espace ($\mathcal{A}$) les éléments physiques sont susceptibles d'être représentés; 2° on a défini des voisinages pour ces éléments physiques en termes de résultats de mesures ⁽²⁾, ⁽³⁾.

Si l'on ne tient compte que des expériences à l'échelle humaine avec leur précision limitée, on constate que l'espace euclidien à trois dimensions respecte le quasi-espace défini par ces expériences.

Bien qu'à l'échelle microscopique, des expériences géométriques ne soient pas possibles, des considérations géométriques subsistent en Microphysique; en effet, toutes les mesures microphysiques se font avec des appareils à l'échelle humaine qui sont donc descriptibles dans un espace euclidien. L'espace euclidien sert alors de cadre de représentation et c'est en particulier dans cet espace qu'un observateur décrira les résultats de mesures de type spatial (concernant un système microphysique). Le problème se pose alors de déterminer jusqu'à quel point une telle représentation est légitime.

3. Représentation physique d'un corpuscule. — Revenons maintenant

(1) M. FRÉCHET, *Les espaces abstraits* (Gauthier-Villars, Paris, 1928).

(2) F. AESCHLIMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 179 et 552; t. 230, 1950, p. 519; t. 232, 1951, p. 695; t. 233, 1951, p. 1578.

(3) J.-L. DESTOUCHES, *Corpuscules et systèmes de corpuscules*, (Gauthier-Villars, Paris, 1941); *Principes fondamentaux de Physique théorique* (Hermann, Paris, 1942), t. II.

aux notions de système physique et de corpuscule. Partons (comme dans la seconde partie) de la définition du corpuscule donnée par M. J.-L. Destouches ⁽¹⁾ fondée sur la notion de morcellement.

D'après le principe de l'atomisme, toute suite de morcellements d'un objet physique est finie et déterminée; une partie d'un système physique qui est insécable relativement à des procédés de morcellement $\mathcal{M}$ donnés sera appelée *corpuscule* relativement à ces procédés. Un corpuscule insécable par rapport à tout procédé de morcellement est dit *corpuscule élémentaire*. Si nous admettons la définition d'Euclide ⁽²⁾ selon laquelle « un point est ce qui n'a pas de partie » et la proposition de Leibniz ⁽³⁾ : « là où il n'y a pas de parties, il n'y a ni étendue ni figure ni divisibilité possible », nous sommes conduit à représenter un corpuscule par un point géométrique; son indivisibilité traduit adéquatement l'insécabilité du corpuscule. Mais une telle représentation est imposée uniquement par l'insécabilité et c'est pour cette seule raison que les diverses propriétés du corpuscule vont se trouver exprimées au moyen d'entités géométriques fonctions du point figuratif, comme elles le sont en Mécanique classique et en Mécanique quantique : scalaire pour la masse et la charge, vecteur pour le moment dipôle et le moment magnétique, tenseur pour le tenseur central d'inertie d'un solide petit, spineur pour le spin, etc.

Or il n'y a aucune raison de penser qu'une telle représentation soit parfaitement adéquate ni qu'on ait déjà découvert par l'expérience toutes les propriétés physiques d'un corpuscule. Il peut toujours exister des grandeurs observables en principe, encore ignorées, et qui ne se laisseront pas décrire de cette manière.

Par l'expérience le physicien n'obtient qu'un ensemble fini de nombres, mais on peut penser que cet ensemble a un nombre cardinal qui dépasse un nombre donné N_1 . Rien ne nous empêche d'imaginer que ce nombre cardinal dépasse tout nombre entier N donné d'avance et ainsi, éventuellement, un corpuscule pourrait se trouver caractérisé par une infinité dénombrable de nombres.

Les propriétés physiques actuellement connues d'un système représentable géométriquement par un point sont en nombre fini et déter-

⁽¹⁾ J.-L. DESTOUCHES, *Principes fondamentaux de Physique théorique* t. II, (Hermann, Paris 1942); *Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle* (Gauthier-Villars, Paris 1958).

⁽²⁾ EUCLIDE, *Éléments de Géométrie*, première définition : « Σημεῖον ἔστιν, ὃν μέρος, οὐθέν ».

⁽³⁾ LEIBNIZ, *Monadologie*, prop. 3.

miné. Mais on a le droit de penser que dans une théorie meilleure, tout corpuscule ne puisse être ainsi entièrement caractérisé, et nous devons laisser ouverte la possibilité d'une caractérisation par une infinité dénombrable de nombres.

4. **Le principe de limitation.** — La donnée d'une infinité dénombrable de nombres est équivalente à la caractérisation d'une fonction appartenant à un espace fonctionnel séparable. D'autre part le nombre cardinal de l'ensemble des nombres nécessaires à déterminer une fonction en Physique ne saurait dépasser la puissance du dénombrable (cette puissance étant déjà obtenue par un passage à la limite à partir des possibilités expérimentales effectives). On doit donc admettre un *principe de limitation* ⁽¹⁾ d'après lequel les fonctions acceptables dans une théorie physique doivent pouvoir être atteintes au moyen d'une suite dénombrable de fonctions caractérisées chacune par un ensemble fini et déterminé de nombres expérimentaux. Il faut poser cette exigence de séparabilité pour toute théorie physique.

Si donc nous voulons décrire un corpuscule sous son aspect physique d'une manière complète, c'est-à-dire en laissant ouverte la possibilité de toute nouvelle caractérisation (ce qui revient à ménager une infinité dénombrable de caractérisations possibles), nous devons le représenter par une fonction constituant un point d'un espace fonctionnel séparable. Nous désignerons cette fonction par u . Dans certains cas, il sera plus adéquat de représenter le corpuscule non pas par une seule fonction u , mais par un ensemble fini déterminé u_i , pourvu que cet ensemble constitue un point d'un espace abstrait séparable (au sens de Fréchet).

5. **Corpuscule et univers.** — En Physique théorique, on admet que l'univers forme un tout solidaire; de ce fait, en distinguant un système physique (aussi bien macroscopique que microscopique), on crée une situation fictive qui décrit imparfaitement la situation réelle; le système est altéré par cette distinction d'une façon qui peut ne pas être toujours négligeable. Mais en pratique, avec une bonne approximation dans certains cas, on peut dans l'univers distinguer des parties qu'on étudiera d'une façon indépendante pendant un certain intervalle de temps; de telles parties sont appelées *systèmes physiques*.

Lorsque c'est un corpuscule qu'on considère ainsi indépendamment

(1) P. DESTOUCHES-FÉVRIER, *La structure des théories physiques*, p. 21 (Presses universitaires, Paris, 1951).

du reste de l'univers pendant un certain intervalle de temps, on peut le traiter comme un corpuscule libre obéissant aux lois de la Mécanique ondulatoire. Ainsi donc, dans une première approximation, adéquate en certains cas pendant un certain intervalle de temps, on pourra considérer un corpuscule indépendamment du reste de l'univers, c'est-à-dire de l'environnement.

Dans une seconde approximation ayant déjà un domaine d'adéquation plus étendu, on atténue la coupure entre le système et l'univers en tenant compte du reste de l'univers ou plus exactement de l'environnement non spécifié, au moyen d'une action globale décrite par un champ de forces (c'est ainsi qu'on tient compte au moyen du champ de pesanteur, de l'action des molécules de la Terre et du reste de l'univers sur un système mécanique à la surface de la Terre). Dans cette approximation on néglige, d'une part, la réaction du système sur le reste de l'univers et, d'autre part, les actions individuelles de chaque élément de la partie non spécifiée sur les éléments de la partie spécifiée qu'on remplace par une interaction moyenne globale dite *champ extérieur*. Ce procédé s'applique, en particulier, au cas où le système étudié (partie spécifiée) est constitué par un seul corpuscule. Cette approximation cesse d'être adéquate au-delà d'un certain degré de précision. Dans cette seconde approximation, le champ extérieur est une fonction donnée de point et du temps, soit $F(P, t)$ (scalaire, vecteur ou tenseur), d'où, au moyen de certaines opérations, on dérive des forces agissant sur chacun des éléments du système étudié.

On peut compléter ce champ extérieur moyen par un champ aléatoire pour tenir compte des fluctuations autour de la valeur moyenne provoquées par le mouvement incessant et extraordinairement compliqué des corpuscules de l'environnement.

Dans une troisième approximation, on tient compte d'une réaction du système sur le champ, mais ce procédé même ne décrit pas complètement la situation réelle, car il ne tient pas compte des actions individuelles de tous les éléments de l'univers.

Par la coupure que constitue la distinction d'un système dans l'univers, on crée une situation fictive qui décrit imparfaitement la situation réelle. On atténue cette coupure par le procédé du champ extérieur, mais on ne peut l'effacer complètement. On peut également améliorer la qualité des approximations en considérant un autre système plus large dont le système primitif est une partie, mais la coupure essentielle introduite par la distinction d'un système demeure. Même lorsqu'en particulier notre système peut être décrit comme un corpuscule unique

obéissant aux lois de la Mécanique ondulatoire et soumis à des actions extérieures, la situation réelle n'est pas saisie complètement; il faudrait d'une part, traiter l'univers dans son ensemble et, d'autre part, en spécifier les parties. Le champ ne décrit pas les actions individuelles de tous les éléments de l'univers. Ce serait le cas même si l'on adoptait un processus de géométrisation analogue à celui de la Relativité générale. Il faut donc rechercher un procédé susceptible d'atténuer la coupure mieux que ne le fait la méthode du champ extérieur.

6. **Insuffisance d'une représentation ponctuelle.** — On peut alors se demander s'il n'y aurait pas, pour décrire les effets de l'extérieur sur un système, un autre procédé que celui des champs de forces permettant de parvenir à une meilleure approximation. Or dans toutes les théories existantes, le mouvement d'un système n'est conditionné que par les caractéristiques propres de ce système et par les actions auxquelles il est soumis. Si donc nous voulons remédier à la situation artificielle que constitue un découpage d'une partie de l'univers (système physique) mieux que n'y parvient la méthode du champ extérieur, il faut que l'extérieur (ou partie non spécifiée) exerce une influence non seulement sur les actions auxquelles le système est soumis, mais encore sur ses caractéristiques propres. Pour cette raison, la représentation d'un corpuscule par un point géométrique dont nous parlions plus haut s'avère insuffisante, une telle caractérisation n'étant pas modifiable par l'extérieur. Il faut donc une représentation autre qu'une représentation ponctuelle.

7. **Représentation fonctionnelle d'un corpuscule.** — Un corpuscule ne peut pas non plus être caractérisé par une figure géométrique invariable (corps rigide) dépendant d'un nombre fini de paramètres, par exemple une sphère ou un ellipsoïde, car on se trouverait dans des conditions semblables à celles de la représentation ponctuelle. En effet, en considérant trois de ses paramètres comme les coordonnées d'un point et les autres paramètres comme des quantités attachées à ce point, on serait ramené à la situation envisagée au premier paragraphe.

Pour qu'un corpuscule soit influençable dans ses propres caractéristiques, il doit nécessairement se trouver déterminé par une infinité d'éléments. Mais en vertu du principe de limitation rappelé ci-dessus (§ 4), cette infinité a la puissance du dénombrable. En effet, le nombre cardinal de l'ensemble des éléments nécessaires à déterminer une entité physique ne saurait dépasser la puissance du dénombrable.

Or une telle caractérisation est équivalente à celle d'une fonction appartenant à un espace fonctionnel séparable. D'après le principe de limitation il faut poser cette exigence de séparabilité pour toute théorie physique.

On est ainsi conduit à admettre que dans une quatrième approximation, un corpuscule sera représenté par une fonction que nous choisirons à valeurs complexes. Nous désignerons par u la fonction représentant un corpuscule. Elle appartiendra à un espace fonctionnel séparable $(\mathbf{R}_u)$, soit

$$u \in (\mathbf{R}_u).$$

Mais chaque fois qu'on explicite le fait qu'un corpuscule a une caractéristique interne s'exprimant au moyen d'une grandeur dont le spectre ne comprend qu'un nombre fini de valeurs (comme le spin ou le spin isotopique), la fonction u se décompose en un ensemble fini et déterminé de fonctions u_i , cependant cet ensemble (désigné par u) constitue encore un point d'un espace séparable $(\mathbf{R}_u)$ (espace abstrait de Fréchet).

C'est cette fonction u ou cet ensemble de fonctions u_i qui constitue la représentation fonctionnelle d'un corpuscule. La présence de l'extérieur influence la forme de la fonction u . Par exemple, la présence d'un corps solide supposé impénétrable se traduit par une condition aux limites de ce corps pour la fonction u . On dispose donc ainsi d'un processus plus fin venant compléter la méthode du champ extérieur pour tenir compte de la présence du reste de l'univers.

Dans les considérations précédentes, nous n'avons fait intervenir qu'un seul observateur. Dans le cas où l'on considère un ensemble d'observateurs qui échangent des signaux et qui sont en mouvement les uns par rapport aux autres, la variance des grandeurs attachées au corpuscule se précise et l'on est conduit à distinguer entre grandeurs cinétiques et grandeurs caractéristiques internes. Le nombre des composantes u_i de l'ensemble u de la représentation fonctionnelle se trouve alors fixé par des conditions de covariance et des caractéristiques internes. Le nombre des u_i dépend donc du type de corpuscule considéré.

L'ensemble des u_i , que nous désignerons par u , constitue un élément géométrique de variance définie (spineur ou tenseur); par exemple, si l'on tient compte du spin d'un électron, on aura pour le représenter quatre fonctions u_i constituant un spineur. La mise en évidence d'un nouveau caractère interne d'un corpuscule décompose les u_i en des u_{ij} , leur ensemble restant toujours fini.

8. **Représentation géométrique d'un corpuscule.** — La représentation fonctionnelle ne supprime pas la représentation géométrique au moyen d'un point (représentation qui résulte de l'insécabilité du corpuscule par rapport aux processus de morcellement pris en considération dans la théorie, et qui suffit à elle seule en première approximation).

Comme l'aspect géométrique est un aspect partiel de la réalité physique, le corpuscule doit, en tant qu'élément insécable, être représenté géométriquement par un point M . Ce point doit être définissable au moyen de la fonction u qui représente la totalité des caractères physiques du corpuscule; par suite, M doit être une fonctionnelle de u , soit

$$M = F[u].$$

Cette fonctionnelle sera désignée par l'écriture **sing** u , soit

$$(1) \quad M = \text{sing } u.$$

[La notation **sing** est introduite pour rappeler que dans la conception de la double solution de M. Louis de Broglie de 1927 ⁽¹⁾, qui est la première théorie où un corpuscule a été représenté par une fonction, le point M était la singularité mathématique de la fonction u , mais il n'est pas du tout nécessaire que u présente une singularité et en général la fonction u n'en aura pas; la singularité n'apparaîtra qu'à l'approximation linéaire.]

9. **Fonction u et fonction ψ de la Mécanique ondulatoire.** — Remarquons que la fonction u représentant le corpuscule au point de vue physique est essentiellement différente de la fonction d'onde ψ de la Mécanique ondulatoire qui, elle, décrit nos connaissances sur le corpuscule et non pas le corpuscule lui-même. Dans les hypothèses envisagées ici, le corpuscule est représenté par la fonction u alors que dans la Mécanique ondulatoire il est décrit par un point variable libre M , argument de la fonction ψ . Dans notre représentation fonctionnelle, les prévisions concernant le corpuscule sont décrites par une fonctionnelle $X[u, t]$ qui jouera un rôle semblable à celui de la fonction $\psi(M, t)$ en Mécanique ondulatoire.

Nous sommes donc conduit à adopter, comme représentation d'un corpuscule, un point géométrique M de l'espace physique pour sa

(¹) *J. Phys. Rad.*, série VI, t. 8, n° 5, mai 1927, p. 225-241.

représentation géométrique et une fonction u pour sa représentation physique.

10. Le principe du rattachement spatial. — Dans les considérations qui précèdent, la fonction u n'a été introduite que comme point d'un espace fonctionnel séparable, mais pas du tout comme loi de correspondance entre deux variables. Cependant, comme il s'agit d'une fonction, il faut en préciser les arguments. Les raisonnements précédents ne les font pas intervenir et ils ne peuvent être précisés qu'au moyen d'une hypothèse physique. Nous ferons intervenir la suivante sous forme d'un principe :

PRINCIPE DU RATTACHEMENT SPATIAL. — *Un élément mathématique d'une théorie physique qui possède une signification physique se rattache de quelque manière au temps et à l'espace.*

Cette assertion n'est pas un postulat à utiliser déductivement, mais un principe qui sert dans la synthèse inductive ⁽¹⁾ de la théorie fonctionnelle générale du corpuscule.

Nous avons à fixer les arguments de notre fonction u (ou de nos fonctions u_i) considérée par hypothèse comme un élément physique décrivant un corpuscule. D'après le principe précédent, cette fonction doit être rattachée à l'espace et au temps; ceci conduit à fixer que, dans le système de référence d'un observateur, la fonction u a pour arguments un point variable P de l'espace physique et une variable temporelle T parcourant l'ensemble des instants de l'horloge de l'observateur, soit

$$u = u(P, T).$$

Il faut bien remarquer que la signification du point P argument de la fonction u est toute différente de celle du point M dont il a été question plus haut : le point M représente géométriquement le corpuscule, il désigne un objet, c'est une *variable désignative*. Au contraire, le point P désigne une *variable libre* qui parcourt l'espace et ne représente

(1) Pour une signification précise de ce terme, se reporter à l'un des Ouvrages suivants :

J.-L. DESTOUCHES, *Essai sur la forme générale des théories physiques* (Thèse principale pour le Doctorat ès Lettres, Paris, 1938; Publ. in *Coll. Monographies Math.*, Univ. Cluj, Roumanie, fasc. 5, 1938); *Principes fondamentaux de Physique théorique*, t. I : *Orientation préalable*, édité par le C. N. R. S. (Hermann, Paris, 1942); *Méthodologie, Notions géométriques*, t. I du *Traité de Physique mathématique et de Physique théorique* (Gauthier-Villars, Paris, 1953).

aucun objet, aucun corpuscule : c'est l'argument d'une fonction. De même, l'argument T ne représente pas un instant de l'horloge de l'observateur, mais une variable libre qui parcourt l'ensemble des instants. Ni P ni T n'ont de signification physique, seule la fonction u en a une : elle représente un objet, le corpuscule.

Le point M qui représente géométriquement le corpuscule ne doit pas nécessairement être interprété comme désignant la position d'un objet ponctuel localisé, ce peut être aussi un point variable libre (comme c'est le cas dans la Mécanique ondulatoire usuelle), point qui sera l'argument de la fonction d'onde prévisionnelle $\psi(M, t)$. Mais la signification d'une fonction ψ est complètement différente de celle d'une fonction u : en Mécanique ondulatoire, une fonction $\psi(M, t)$ exprime nos connaissances, l'argument M est une variable libre désignant un corpuscule (variable désignative) et t a le sens paramétrique : t indique le temps lu sur l'horloge de l'observateur considéré. Dans la théorie fonctionnelle, u joue le rôle de M et une fonctionnelle $X[u, t]$ joue le rôle de $\psi(M, t)$; les variables P et T n'ont aucune signification physique autre que celle d'être les arguments d'une fonction variable u .

11. **Champ et onde physique.** — Si l'on appelle *champ* une fonction de point et du temps, la fonction $u(P, T)$ est un champ en ce sens. En Mécanique classique un point matériel, c'est-à-dire un corpuscule à l'approximation classique, est représenté par un *point valorisé* ⁽¹⁾, c'est-à-dire par un point fixé par la valeur numérique du paramètre t , point $M(t)$ fonction du temps t . En Mécanique ondulatoire, un corpuscule est représenté par un *point variable libre* M . Dans une théorie fonctionnelle, un corpuscule est représenté par le champ $u(P, T)$. Nous étendrons l'emploi du mot « onde » au champ de la fonction u et nous appellerons *onde physique* la fonction $u(P, T)$. Par opposition, l'onde $\psi(M, t)$ de la Mécanique ondulatoire, ou une extension $\Psi(M, t)$ de cette notion en théorie fonctionnelle, sera dite *onde prévisionnelle*.

La fonctionnelle $X[u, t]$ au moyen de laquelle on calcule des prévisions dans le cas d'une représentation fonctionnelle du corpuscule sera dite *onde fonctionnelle*; c'est une onde qui se propage dans l'espace fonctionnel (R_u) dont les points sont les fonctions u . C'est à partir de

(1) Un point « valorisé » est un point défini par une fonction $M(t)$, qui est fixé pour chaque valeur de la variable t : on doit toujours distinguer entre « valeur d'une fonction » et « loi fonctionnelle », cette distinction se note habituellement au moyen de l'opérateur abstraction de Church (CHURCH, *The calculi of λ -conversion*, *Annals of Math. studies*, n° 6, Princeton University Press, 1941).

cette onde que se calculent les prévisions lorsqu'on adopte pour le corpuscule une représentation fonctionnelle. Ainsi trois types d'ondes interviennent dans cette théorie, d'où le qualificatif triondulatoire.

12. Liaison entre les ondes u et ψ . — On pourrait penser, d'après ce qui précède, qu'on a la liberté de choisir entre deux représentations équivalentes : la représentation au moyen de l'onde ψ habituelle et de champs de forces, et la représentation au moyen de l'onde physique u explorant l'environnement et guidant le corpuscule. Mais cette équivalence n'a pas lieu; en effet l'onde physique u à la fois fournit une description plus fine que celle obtenue au moyen du point M et fait intervenir des champs de forces; de plus la représentation plus complète du corpuscule au moyen de l'onde physique $u(P, T)$ permet de tenir compte également des propriétés qui résultent des réactions de l'environnement; l'onde u dépend du type de corpuscule et du dispositif expérimental dans lequel se trouve le corpuscule observé. Ainsi le schéma de la représentation fonctionnelle est assez riche pour permettre de décrire dans une fonction u les caractéristiques internes connues et celles encore inconnues sans limitation, ainsi que l'influence de l'environnement ou du reste de l'univers qui n'est pas décrite entièrement par les champs de forces habituels.

Il faut bien remarquer, si l'on admet les hypothèses adoptées ici, qu'il ne peut exister une liaison fonctionnelle entre l'onde physique $u(P, T)$ et l'onde prévisionnelle ψ de la Mécanique ondulatoire ou d'un prolongement de cette notion en théorie fonctionnelle. En effet, u décrit par hypothèse un phénomène physique objectif (le corpuscule), tandis que ψ décrit nos prévisions qui sont relatives à nos connaissances. Les fonctions ψ et u ne peuvent être liées que stochastiquement.

La fonction ψ décrit une évaluation sommaire des prévisions, évaluation exprimable à partir de la description géométrique ponctuelle du corpuscule; ces prévisions, d'une manière rigoureuse, doivent s'exprimer au moyen de la fonctionnelle $X[u, t]$. Autrement dit on peut poser

$$X[u, t] = X_1[u, t] + X_2[u, t],$$

de telle façon que

$$X_1[u, t] = \mathcal{V}(\text{sing } u, t).$$

Lorsque la représentation géométrique est suffisante, on peut négliger le terme X_2 et l'on a des prévisions équivalentes à celles de la Mécanique ondulatoire en vertu de l'équation (1). Il faut bien noter qu'un

corpuscule n'apparaît que lors d'une observation où intervient un dispositif compliqué introduisant diverses conditions pour l'onde physique u et traduisant l'influence de l'environnement.

Dans une construction phénoméniste, la fonction u , argument de la fonctionnelle X est une variable libre dans l'espace fonctionnel des fonctions u ; *il ne peut exister une fonction u déterminée évoluant fonctionnellement au cours du temps, soit connue, soit inconnue* car :

1° si u était liée fonctionnellement à ψ alors u cesserait d'être physique pour devenir prévisionnelle (mais évoluerait fonctionnellement au cours du temps t), ce cas est donc à écarter;

2° si u évolue fonctionnellement au cours du temps, soit $u(t)$, alors comme M est lié fonctionnellement à u par l'équation (1) (par exemple, par un procédé de moyenne), si u évolue de cette façon, le point M évoluera lui aussi fonctionnellement au cours du temps, car d'après (1), on aura

$$M(t) = \text{sing } u(t);$$

M serait donc déterminé au cours du temps, soit $M(t)$; or ceci est contraire aux lois quantiques; comme la description fonctionnelle doit, en première approximation, fournir les résultats de la Mécanique ondulatoire, il est nécessaire que M n'évolue pas fonctionnellement au cours du temps, donc, en vertu de (1) également, que u n'évolue pas fonctionnellement au cours du temps; u comme M apparaît nécessairement comme une variable aléatoire.

13. Cas d'un système. — Si maintenant on considère un système de corpuscules, chacun doit avoir une onde u dans l'espace-temps usuel, on peut décrire le système au moyen d'une fonctionnelle X dont les arguments sont les diverses fonctions u_j associées à chacun des corpuscules. La fonctionnelle X apparaît alors comme une fonction d'un point u_N d'un espace fonctionnel de configuration obtenu comme produit cartésien des espaces des fonctions u_j attachées à chaque corpuscule du système.

Dans le cas d'un système, la différence entre l'onde ψ et les ondes u_j est plus grande que dans le cas d'un corpuscule unique, parce que les arguments sont différents : ψ dépend de N points $M_1, \dots, M_N$, tandis que chaque onde u_j ne dépend que d'un point P ; l'onde ψ se propage dans l'espace de configuration, tandis que les ondes u_j se propagent dans l'espace physique. Les conditions de symétrie ou d'antisymétrie

de la fonction ψ de la Mécanique ondulatoire (représentation ponctuelle sommaire) se transposent immédiatement à la fonctionnelle X et s'expriment d'une manière identique.

14. Théorie de la double solution de M. Louis de Broglie. — Les recherches entreprises pour surmonter les difficultés actuelles sont inspirées en grande partie par les idées de M. Louis de Broglie ⁽¹⁾ datant des débuts de la Mécanique ondulatoire. Dans la conception de la « double solution », l'onde u évolue d'une façon déterminée, en somme selon les lois d'une mécanique ponctuelle dans l'espace fonctionnel, ce qui correspond à une représentation réaliste. Dans la représentation phénoméniste envisagée ici, l'onde u évolue au point de vue formel suivant les lois d'une Mécanique ondulatoire dans l'espace des fonctions u ; il y a donc ondulation de la fonction $u(t)$ de M. L. de Broglie.

Le schéma général que nous avons envisagé ici n'est pas catégorique; il faut le particulariser avec d'autres conditions physiques. Deux réalisations doivent être mentionnées : d'une part, la théorie de la « double solution » déjà citée et d'autre part, l'essai de M. Tharrats ⁽²⁾ adoptant une fonction analytique pour caractériser un électron.

Dans la méthode triondulatoire, les corpuscules sont décrits par leur représentation fonctionnelle, par suite l'interaction des corpuscules ne s'y décrit pas de la façon habituelle au moyen de champs quantifiés localisés; l'action d'un champ sur un corpuscule ne se fait pas sentir en un seul point, mais tout point où l'onde u a une amplitude non nulle contribue à cette action par suite de l'intervention de la fonction u . Le schéma usuel associant champ et corpuscules équivalents (comme les échanges virtuels de photons) se transpose, les corpuscules étant décrits par leur représentation fonctionnelle. Si l'on remplace la fonction u par une fonction ψ , on retombe sur la représentation ponctuelle habituelle des théories quantiques. Si l'on remplace u par une fonction déterminée convenable, on retombe sur une théorie analogue à celle du champ non localisé de Yukawa ⁽³⁾.

15. Fluide associé à un corpuscule sans spin. — La représentation d'un corpuscule par une fonction $u(P, T)$, ou un ensemble fini de fonctions $u_i(P, T)$ n'est pas très intuitive. Il est commode d'associer à

⁽¹⁾ Voir p. 149.

⁽²⁾ J. THARRATS, *J. Phys. Rad.*, t. 13, 1952, p. 283.

⁽³⁾ YUKAWA, *Phys. Rev.*, t. 77, 1950, p. 219.

cette fonction d'autres fonctions auxquelles on pourra faire correspondre une représentation intuitive au moyen d'une interprétation de ces fonctions auxiliaires dans une théorie classique.

Dans le cas où nous considérons un corpuscule sans spin (soit corpuscule de spin zéro, soit corpuscule dont on néglige le spin en première approximation), nous disposons pour le représenter d'une fonction complexe, c'est-à-dire de deux fonctions réelles. Du moment que le corpuscule n'est pas représenté par un point ni par une figure de forme définie (permettant de l'assimiler à un solide), une image mécanique du corpuscule ne peut être que celle d'un globule de fluide (fluide continu au sens de la Mécanique classique et non pas au sens des théories cinétiques d'une moyenne sur un grand nombre de particules; il s'agit d'une image purement mathématique).

Si l'on associe un fluide à la fonction u , il faut définir sa densité au moyen d'une fonction ρ positive ou nulle. A partir d'une fonction complexe, il existe une telle fonction qui lui est reliée d'une façon simple : c'est le carré du module de cette fonction, d'où :

On convient d'associer à la fonction $u(P, T)$ représentant un corpuscule, un fluide continu classique dont la densité sera, par définition,

$$(2) \quad \rho(P, T) =_d |u(P, T)|^2.$$

Ce fluide est tout à fait différent du fluide de probabilité de la Mécanique ondulatoire qui ne décrit que des possibilités de présence; ici, il s'agit au contraire de la description mathématique d'une réalité physique : le corpuscule, caractérisé par sa représentation fonctionnelle $u(P, T)$.

16. Potentiel des vitesses du fluide associé. — Une fonction complexe peut être définie par son module et son argument; ayant donné une interprétation hydrodynamique du module de u , il faut maintenant donner une interprétation de son argument qui devra caractériser un élément important du fluide associé. Or c'est la vitesse du fluide qui est l'un des éléments les plus importants. Nous disposons d'une seule fonction $\arg u$; mais on peut caractériser les vitesses d'un fluide par une seule fonction lorsqu'il y a potentiel des vitesses et ceci conduit à poser, dans le cas d'un corpuscule qui n'est pas soumis à un champ magnétique, que le fluide associé admet un potentiel des vitesses Φ calculable à

partir de $\arg u$. Il est naturel de poser

$$(3) \quad \Phi(P, T) = \frac{1}{\kappa} \arg u(P, T),$$

où κ est une certaine constante et où $\arg$ signifie « argument imaginaire de ». Alors dans ce cas, la vitesse du fluide en un point P à l'instant T est donnée par

$$(4) \quad \mathbf{v}(P, T) = \text{grad } \Phi(P, T) = \frac{1}{\kappa} \text{grad } \arg u(P, T).$$

Les définitions (2) et (3) sont justifiées d'abord par le fait qu'on peut définir partiellement un fluide en fixant sa densité et son potentiel des vitesses. Ces deux fonctions peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre et arbitrairement (sous réserve que $\rho \geq 0$); on est donc bien libre de prendre les formules (2) et (3) comme définitions de la densité et du potentiel des vitesses du fluide associé. Mais nous verrons plus loin (§ 16), que dans le cas d'un corpuscule électrisé soumis à un champ électromagnétique, il convient d'associer un fluide en mouvement rotationnel, et que dans ce cas on peut poser

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\kappa} \text{grad } \arg u(P, T) + \mathbf{w},$$

où $\mathbf{w}$ est un vecteur proportionnel au potentiel vecteur, soit

$$\mathbf{w} = -\frac{\varepsilon}{mc} \mathbf{A},$$

alors on a un potentiel partiel des vitesses Φ défini encore par (3) et l'on a cette fois

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi(P, T) + \mathbf{w}.$$

Inversement, à une fonction ρ sommable, positive ou nulle, et à une fonction continue Φ , on peut associer une fonction u par

$$(5) \quad u = \sqrt{\rho} e^{i\kappa\Phi}.$$

La correspondance entre fluide associé (caractérisé par sa densité ρ et son potentiel des vitesses Φ) et représentation fonctionnelle du corpuscule u est donc bien biunivoque, la donnée de ρ et Φ est équivalente à celle de u .

17. Propriétés du fluide associé. — 1° De (2) il résulte que la densité ρ du fluide associé varie avec le point P et avec l'époque T . Par suite, le fluide associé au corpuscule est compressible;

2° De (4) il résulte que le mouvement du fluide associé est irrotationnel lorsqu'il n'y a pas de champ magnétique ou de champ de structure analogue;

3° De (4) il résulte encore qu'en général Φ dépend du point P et de l'époque T ; donc le mouvement n'est pas permanent;

4° A partir de la densité $\rho(P, T)$, si elle satisfait à certaines propriétés, on peut définir un point moyen identifiable au point $M = \text{sing } u$, un ellipsoïde des moments quadratiques caractérisant la répartition moyenne du fluide autour du point moyen M , et un rayon moyen de la masse fluide qui peut être identifié au rayon du corpuscule.

Nous avons associé un fluide à la fonction complexe $u(P, T)$ en fixant sa densité ρ et son potentiel des vitesses Φ . Mais comme nous n'avons imposé à $u(P, T)$ aucune condition, nous ne pouvons déduire de u aucune équation pour notre fluide.

18. Mesure sur un corpuscule. — Si l'on effectue sur un corpuscule C une mesure au moyen d'un appareil , cette mesure fournira une certaine connaissance sur le corpuscule C , c'est-à-dire sur la fonction $u(P, T)$ qui le représente et par suite sur le fluide associé. Mais puisqu'il s'agit d'un corpuscule microphysique, il existe des grandeurs non simultanément mesurables en droit, condition nécessaire d'une part pour qu'il y ait raccordement avec les relations d'incertitude de Heisenberg à l'approximation de la Mécanique ondulatoire usuelle, d'autre part en vertu de cette condition plus générale que pour acquérir une connaissance sur un système microphysique, l'appareil de mesure joue un rôle essentiel inéliminable dans la description théorique. On ne peut donc jamais obtenir des connaissances suffisantes pour déterminer toutes les conditions initiales sur le fluide considéré à la manière classique.

Par contre M. J.-L. Destouches ⁽¹⁾ a montré que dans de telles circonstances, on pouvait toujours construire une représentation objectiviste obéissant à des lois déterministes classiques pour décrire un système microphysique en cours d'observation dans un appareil  fixé (c'est-à-dire en somme pour décrire une expérience réalisable par un physicien). De tout ceci il résulte que l'observation au moyen d'un appareil  d'un corpuscule traité selon la représentation fonctionnelle

(1) J.-L. DESTOUCHES, *J. Phys. Rad.*, t. 13, 1952, p. 354 et 385.

peut être décrite suivant les méthodes de la Mécanique classique (avec des forces supplémentaires dites « quantiques » qu'on ne retrouverait pas à l'approximation classique du même problème). Comme nous avons associé un fluide à la représentation fonctionnelle du corpuscule, la description objectiviste du corpuscule en train d'être mesuré au moyen d'un appareil  devra se faire suivant les lois de la Mécanique classique des fluides en mouvement irrotationnel.

Ceci nous fournit les équations du mouvement d'un corpuscule à l'approximation non relativiste dans une description objectiviste; on aura en utilisant les variables d'Euler

$$(6) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

où $\mathbf{v}$ désigne la vitesse et $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ l'opérateur produit scalaire de $\mathbf{v}$ à gauche par ∇ :

$$(7) \quad \mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad \rho = |u|^2,$$

$\mathbf{F}$ est la force par unité de masse, p la pression. En projetant sur les axes de coordonnées on obtient trois équations scalaires.

Aux équations d'Euler (6) nous devons encore adjoindre une équation de continuité; mais aucun des éléments introduits jusqu'ici ne permet d'affirmer que ce fluide soit conservatif. Il est possible qu'il se crée du fluide ou qu'il en disparaisse; on doit donc introduire un terme de sources et de puits, d'où

$$(8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = \sigma,$$

σ désignant le terme dû aux sources et aux puits. Il nous faut encore ajouter l'équation complémentaire ou équation d'état

$$(9) \quad f(p, \rho, \theta) = 0.$$

Les équations (6), (8), (9) seront les équations générales du fluide associé au corpuscule à l'approximation fonctionnelle non relativiste dans une représentation réaliste.

La présence du reste de l'univers (environnement) et d'un appareil de mesure  se traduit de deux façons :

1° *Par des forces* s'exerçant sur le corpuscule, c'est-à-dire sur les éléments du fluide associé; ceci constitue une partie des termes de

forces, soit $\mathbf{F}_a$ pour l'appareil et l'on aura

$$(10) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_e$$

où $\mathbf{F}_e$ désigne l'influence de l'environnement (l'extérieur du système formé par l'appareil et le corpuscule). Ces forces doivent être telles que le mouvement soit irrotationnel lorsque le corpuscule n'est pas soumis à un champ magnétique ou à un champ de structure analogue.

2° *Par des conditions aux limites* : on écrira que le corpuscule ne peut franchir certaines surfaces (parois de l'appareil) c'est-à-dire que les éléments du fluide associé ne peuvent franchir ces parois. C'est par ces conditions aux limites (conditions usuelles de la Mécanique des fluides) que se décrit dans cette représentation réaliste une partie de l'influence de l'environnement du corpuscule; cette partie de l'influence, dont la description nous a conduit à une représentation fonctionnelle du corpuscule, ne peut être exprimée par des forces agissant sur le corpuscule.

En outre, dans le fluide associé, tout ce qui ne dépend intrinsèquement que du corpuscule doit être calculable à partir de la fonction u par des opérations analytiques; par suite θ ne doit pas être une variable indépendante mais une fonction de u .

19. Équations pour la fonction u . — Dans le cas d'un mouvement irrotationnel on peut transformer l'équation (6) en

$$(11) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

et $\mathbf{v}$ peut y être remplacé par son expression en fonction du potentiel des vitesses soit

$$(12) \quad \text{grad} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 \right] = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Finalement nous obtenons donc comme équations dans le cas le plus général : (8), (9), (11), soit en tout cinq équations scalaires pour déterminer les fonctions Φ , ρ , p , et fixer des conditions sur σ et $\mathbf{F}$. En remplaçant Φ et ρ par leur expression en fonction de u , on obtient des équations en u , leur transcription est immédiate; elles sont valables quelle que soit l'expression des forces.

20. Cas d'un fluide de Lagrange. — Supposons que les forces

dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire que

$$\mathbf{F} = \text{grad } U.$$

Cette hypothèse n'est pas plus restrictive que celle faite en Mécanique ondulatoire usuelle quand on suppose que les forces dérivent d'une fonction de forces.

Supposons, en outre, que l'équation d'état du fluide associé [form. (9)] est remplaçable par une équation de la forme

$$(13) \quad p = p(\rho) = p(|u|^2).$$

Cette hypothèse est naturelle, car le fluide associé au corpuscule doit être défini à partir de la fonction u , donc à partir de Φ et ρ , ce qui conduit à ne pas faire intervenir une variable de température θ indépendante, d'où l'équation (13); de cette équation (13) inversée, on tirera ρ en fonction de p .

De (13) il résulte que

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p \, dM = -\frac{1}{\rho} dp.$$

Posons alors

$$A = U - \int \frac{dp}{\rho}, \quad B(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}.$$

Dans ces conditions, les deux membres de (12) sont sous le signe grad. On peut remonter des gradients aux potentiels et l'on aura

$$(14) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 = U - B(\rho).$$

Le mouvement du fluide associé se trouve défini, sous les hypothèses faites, par les équations (14), (8), (13). Dans ce cas, à partir de ces équations nous pouvons parvenir à une équation unique pour u ; en effet (14) et (8) nous donnent des équations telles qu'au premier membre on peut mettre, d'une part la dérivée partielle par rapport au temps de Φ et, d'autre part celle de ρ . Or, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{ik\Phi} \left(\frac{\partial |u|}{\partial t} + ik|u| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).$$

Remplaçons alors les quantités du deuxième membre de cette équation par leurs expressions tirées des équations (4), (8), (14); il vient, après quelques transformations,

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = e^{ik\Phi} \left[\frac{\sigma}{2|u|} - \text{grad } |u| \cdot \text{grad } \Phi - \frac{1}{2} |u| \triangle \Phi + ik|u| \left(A - \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 \right) \right].$$

Mais on vérifie immédiatement que

$$\Delta u = e^{ik\Phi} [\Delta |u| + ik |u| \Delta \Phi + 2ik \operatorname{grad} |u| \cdot \operatorname{grad} \Phi - k^2 |u| (\operatorname{grad} \Phi)^2].$$

Introduisons alors Δu dans l'équation (15), il vient

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2ik} \left(\Delta u - \frac{\Delta |u|}{|u|} u \right) + \frac{\tau}{2|u|^2} u + ik \Lambda u.$$

Nous obtenons ainsi l'équation qui règle l'évolution de la fonction $u(P, T)$ dans une représentation objectiviste. C'est une équation non linéaire.

21. Comparaison avec la théorie de la double solution. — Dans sa théorie de la double solution prise à l'approximation linéaire, M. Louis de Broglie suppose que sa fonction $u(P, t)$ obéit à l'équation d'onde de la Mécanique ondulatoire usuelle (solution avec singularité); on a donc

$$(17) \quad i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - Vu.$$

On voit qu'on peut identifier l'équation (17) avec l'équation obtenue à partir de (15) en supprimant les termes non linéaires, et ceci va fixer la valeur de la constante κ laissée jusqu'à maintenant indéterminée; on en tire immédiatement

$$(18) \quad \frac{1}{\kappa} = -\frac{\hbar}{m}, \quad \kappa = -\frac{m}{\hbar};$$

$$(19) \quad U = -\frac{1}{m} V, \quad V = -mU$$

et l'équation (16), compte tenu de (18) et (19), nous fixe les termes non linéaires d'une équation rigoureuse pour la fonction d'onde physique u de M. Louis de Broglie, soit

$$(20) \quad i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - Vu - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |u|}{|u|} u \\ - mu \int \frac{dp(|u|)}{|u|^2} + \frac{i\hbar \sigma(u, \nabla)}{2|u|^2} u.$$

Ainsi, à partir de considérations sur la notion de corpuscule et la représentation fonctionnelle du corpuscule, sur le fluide associé et sur l'emploi de représentations réalistes, on retrouve, sur la base d'hypothèses très différentes, les équations de la théorie de la double solution de M. Louis de Broglie, et l'on obtient la forme générale de l'équation non linéaire qui régit la propagation de l'onde physique u .

22. Condition pour qu'on puisse associer un fluide à une onde u . — Tout fluide classique ne peut être associé à une onde u (au point de vue purement mathématique, cela s'entend, car il n'y a aucune relation physique entre un fluide classique et un corpuscule).

1° Tout d'abord pour qu'on puisse associer un fluide classique à un corpuscule sans spin ou de spin zéro, sans champ magnétique, il faut que tout mouvement soit irrotationnel :

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \text{alors } \mathbf{v} = \text{grad } \Phi.$$

A un tel fluide on peut faire correspondre une fonction u par (7) soit

$$(7') \quad u = \sqrt{\rho} e^{ik\Phi} \quad \left(\text{avec } k = -\frac{m}{\hbar} \right).$$

2° Cela ne suffit pas pour qu'on obtienne une équation d'ondes en u . Il faut encore que les forces $\mathbf{F}$ agissant sur le corpuscule dérivent d'un potentiel et que la pression ne dépende que de la densité (sans qu'apparaisse une variable indépendante de température), c'est-à-dire qu'on soit dans le cas de Lagrange.

3° Posons pour simplifier

$$B(\rho) = \int \frac{dp}{\rho},$$

car p est une fonction de ρ , et l'intégrale précédente peut être considérée comme une fonction de ρ . Cherchons à identifier l'équation d'onde u de la théorie non linéaire de la double solution avec l'équation en u issue de la Mécanique des fluides. Si l'on désigne par $Q(u, \nabla)$ le terme non linéaire et par V_l le terme potentiel de la Mécanique ondulatoire usuelle $V_l = V(M)$, la première équation prend la forme

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - V_l u - Q(u, \nabla);$$

compte tenu de l'identification des constantes faite au paragraphe précédent, et V_c désignant le terme potentiel complet (qui comprend des termes formés par u et ses dérivées, ce qui n'a pas lieu en Mécanique des fluides classique), la seconde équation s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - V_c u - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |u|}{|u|} u - mB(\rho)u + \frac{i\hbar \sigma}{2|u|^2} u,$$

on voit qu'on a

$$-V_l u - Q(u, \nabla) = -V_c u - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |u|}{|u|} u - mB(\rho)u + \frac{i\hbar \sigma}{2|u|^2} u.$$

D'abord, tous les termes à droite étant multipliés par u , on peut poser

$$\mathcal{R}(u, \nabla) = + \frac{1}{u} Q(u, \nabla),$$

alors $\mathcal{R}$ apparaît dans l'équation d'ondes de la théorie de la double solution comme un potentiel complexe formé par l'onde u elle-même. Nous l'appellerons l'*autopotentiel complexe* de l'onde u . On peut en séparer la partie réelle et la partie imaginaire :

$$V_l + \Re \mathcal{R}(u, \nabla) = V_c + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |u|}{|u|} + mB(|u|^2),$$

$$\Im \mathcal{R}(u, \nabla) = - \frac{\hbar \sigma}{2|u|^2}.$$

La partie réelle se présente comme un *autopotentiel* créé par l'onde elle-même. Dans l'image hydrodynamique il apparaît comme dû aux actions des éléments de fluide les uns sur les autres. La partie imaginaire apparaît comme une *autosource*. C'est l'onde u elle-même qui crée ou détruit du fluide associé.

Si $\mathcal{R}$ est donné, il faudra pour que le fluide soit associable à un corpuscule, que les fonctions B et σ satisfassent aux relations précédentes. La seconde équation détermine immédiatement σ :

$$\sigma = - \frac{2}{\hbar} |u|^2 \Im \mathcal{R}(u, \nabla).$$

La première équation détermine partiellement $B(|u|^2)$ et $V_c(u, \nabla)$. On peut toujours poser

$$\Re \mathcal{R}(u, \nabla) = \mathcal{R}_0(|u|) + \mathcal{R}_1(u, \nabla),$$

alors

$$mB(|u|^2) = \mathcal{R}_0(|u|),$$

$$V_c = V_l + \mathcal{R}_1(u, \nabla) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |u|}{|u|};$$

la décomposition de $\Re \mathcal{R}$ en $\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ n'est pas unique car on peut mettre un terme $\mathcal{R}_0$ sous la forme $\mathcal{R}_{01} + \mathcal{R}_{02}$ et faire entrer $\mathcal{R}_{02}$ dans $\mathcal{R}_1$ tandis que l'on garde $\mathcal{R}_{01}$ pour fixer B .

Donc si $\mathcal{R}$ est donné, les fonctions qui caractérisent le fluide sont déterminées, mais on est libre de faire entrer la partie de $\mathcal{R}$ dépendant de $|u|$ seul soit dans B soit dans V_c . La pression n'est pas univoquement déterminée. D'ailleurs si l'on a fixé $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$, on peut toujours remplacer $\mathcal{R}_0(|u|)$ par $\mathcal{R}_0(|u|) + \mathcal{R}_2(|u|)$ et $\mathcal{R}_1$ par $\mathcal{R}_1(u, \nabla) - \mathcal{R}_2(|u|)$.

Inversement si l'on donne les fonctions caractérisant le fluide, soit V_c , B , σ , l'expression $\mathcal{U}(u, \nabla)$ est déterminée par les formules précédentes. V_c se décompose en deux termes, l'un qui n'est qu'une fonction de point et peut être identifié à V_l , l'autre qui dépend de u et de ses dérivées et servira à former $\mathfrak{H}\mathcal{U}$. Naturellement V_l et $\mathcal{U}$ ne sont pas univoquement déterminés, on peut remplacer V_l par $V_l + V_0(M)$ et $\mathfrak{H}\mathcal{U}$ par $\mathfrak{H}\mathcal{U} - V_0(M)$.

Il n'y a donc pas de correspondance biunivoque entre le fluide associé et l'onde u . La liaison existe entre $V_l(M) + \mathcal{U}(u, \nabla)$ et $V_c + mB(|u|^2)$.

23. Cas de la théorie linéaire de la double solution. — Si nous examinons le cas de l'ancienne forme de la théorie de la double solution où il n'y a pas de terme non linéaire, on aura, comme $\mathcal{U} = 0$,

$$V_l = V_c + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |u|}{|u|} + mB(|u|^2),$$

$$- \hbar \frac{\sigma}{2|u|^2} = 0.$$

D'où $\sigma = 0$, le fluide est conservatif, et V_c est une somme de deux fonctions, dont une fonction de point V_l , et ou bien l'opposé au potentiel quantique si B est nul (pression nulle), ou bien si l'on choisit une certaine expression pour B , elle doit être compensée par un terme opposé en V_c , soit

$$V_c = V_l(M) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |u|}{|u|} + F(|u|^2),$$

$$mB(|u|^2) = -F(|u|^2).$$

Ici encore il n'y a pas détermination univoque. On voit qu'on a affaire à un fluide de type très particulier, avec un terme d'autopotential en $\frac{\Delta |u|}{|u|}$, c'est-à-dire en $\frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$.

En outre, en Mécanique des fluides classique, il ne figure pas d'autopotential.

24. Conclusion. — Dans la recherche d'une théorie meilleure que la Mécanique ondulatoire usuelle, nous avons été conduit, en particulier pour décrire l'influence de l'environnement sur un corpuscule et pour éviter la coupure entre un corpuscule et le reste de l'univers, à introduire une représentation fonctionnelle d'un corpuscule au moyen d'une

fonction $u(P, T)$. Nous avons associé un fluide à cette représentation fonctionnelle du corpuscule. Dans une description objectiviste d'un corpuscule en observation dans un appareil, nous avons admis que ce fluide obéissait aux équations classiques de l'Hydrodynamique, ce qui vient préciser le mouvement du corpuscule. Dans l'hypothèse d'un fluide de Lagrange, on obtient une équation non linéaire pour la fonction u ; l'approximation linéaire de cette équation peut être identifiée à l'équation d'onde linéaire utilisée par M. Louis de Broglie dans sa théorie de la double solution. On obtient ainsi une équation d'onde non linéaire pour la fonction u dans cette théorie.

Une représentation intuitive du corpuscule est fournie par un globule fluide (ce globule est tout différent du globule formé par un train d'onde en Mécanique ondulatoire usuelle, globule qui va en se dissolvant, ce qui n'est pas le cas ici, les termes de sources, de pression et de forces étant convenablement choisis).

L'interaction entre corpuscules devient une interaction entre les éléments des fluides qui leur sont associés; ceci conduit à une théorie de champs non locaux un peu analogue à celle de Yukawa. Si le fluide vient à se concentrer en un point, on retrouve les théories quantiques usuelles.



CHAPITRE II

EXTENSIONS DE LA THÉORIE FONCTIONNELLE DES CORPUSCULES

1. **Extension aux systèmes non canoniques.** — Au chapitre I de la troisième partie, nous avons examiné le cas d'un corpuscule soumis à des forces dérivant d'un potentiel; le mouvement de l'onde physique u est régi par une équation d'ondes non linéaire. Le terme non linéaire s'interprète ainsi : sa partie réelle est un autopotentiel supplémentaire, sa partie imaginaire est un terme d'autosource. L'image hydrodynamique que nous avons associée à ce mouvement suggère une extension de cette théorie au cas d'un corpuscule soumis à des forces ne dérivant pas d'un potentiel : on adoptera comme équations fondamentales les équations hydrodynamiques correspondantes, soit l'équation d'Euler et l'équation de continuité avec pour équation d'état une liaison entre la pression et la densité, enfin le mouvement est supposé irrotationnel lorsqu'il n'y a pas de champ magnétique ou de champ de structure analogue :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = \sigma, \\ p = p(\rho). \end{array} \right.$$

En vertu de l'hypothèse que le mouvement est irrotationnel, on peut transformer l'équation d'Euler (1) comme nous l'avons fait au chapitre I, et introduire le potentiel des vitesses, d'où finalement les équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{grad} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 \right] = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = \sigma, \\ p = p(\rho) \end{array} \right.$$

et l'on a

$$u = \sqrt{\rho} e^{ik\Phi}, \quad k = -\frac{m}{\hbar}.$$

Comme on suppose ici que les forces ne dérivent pas d'un potentiel, on ne peut pas remonter des gradients aux potentiels dans l'équation (2). Comme dans le cas traité au chapitre I, p et σ ne sont pas connus, de même que la force supplémentaire quantique : F se divise en une somme de deux termes, l'un est la force classique, l'autre l'autoforce, fonctionnelle de u et de ses dérivées, qui introduit la non-linéarité.

Avec ces hypothèses, on peut traiter les exemples étudiés à la fin de la deuxième partie, corpuscules soumis à des forces dépendant de la vitesse (comme dans l'expérience de Maurice de Broglie et l'expérience de Millikan). On posera qu'on a encore les mêmes intégrales premières qu'en Mécanique ondulatoire usuelle [ceci au sens d'intégrales premières conditionnelles satisfaites pour les mouvements limites ⁽¹⁾]. L'existence de ces intégrales premières vient imposer des conditions au terme de source et au terme de forces pour les mouvements limites.

Dans ce cas, bien qu'il n'y ait pas une équation d'ondes unique pour u , on a un système d'équations aux dérivées partielles et l'on peut donc traiter des problèmes non canoniques en théorie fonctionnelle (tandis qu'on ne peut le faire en Mécanique ondulatoire usuelle). Dans le cas d'un corpuscule soumis en outre à un champ magnétique ou à un champ analogue, le mouvement n'est plus irrotationnel, on a encore des équations aux dérivées partielles pour déterminer u , mais nous n'entrerons pas davantage dans les détails.

2. Extension au cas de la théorie de Pauli. — Au chapitre I, nous avons traité le cas d'un corpuscule sans spin. Envisageons maintenant le cas d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ soumise aux équations de Pauli ⁽²⁾.

D'après le principe général posé par J.-L. Destouches ⁽³⁾, à une équation $\mathcal{E}(\psi) = 0$ d'une Mécanique ondulatoire usuelle, on fera correspondre une équation

$$\mathcal{E}(u) = Q\left(u, \nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

comme équation de l'onde physique u représentant le corpuscule.

⁽¹⁾ J.-L. DESTOUCHES, *Quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules* (Gauthier-Villars, Paris, 1956), p. 59-70.

⁽²⁾ PAULI, *Z. Physik*, t. 43, 1927, p. 601. Voir aussi L. DE BROGLIE, *L'électron magnétique* (Hermann, Paris, 1934), p. 119-129.

⁽³⁾ J.-L. DESTOUCHES, *ibid.*, p. 24.

W. Pauli ⁽¹⁾ a posé qu'en Mécanique ondulatoire, un électron (ayant un spin $\frac{1}{2}$) placé dans un champ électromagnétique donné obéissait à un système de deux équations qu'on peut écrire symboliquement sous la forme d'une équation d'ondes

$$(3) \quad \mathfrak{H}\psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

où

$$(4) \quad \mathfrak{H} = {}_d\mathfrak{H}_0 + \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{H} \cdot \vec{s},$$

$$\mathfrak{H}_0 = {}_d \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - e\mathcal{V},$$

avec

$$\vec{p} = {}_d i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A},$$

$\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur, $\mathcal{V}$ le potentiel scalaire, $\mathbf{H}$ le champ magnétique, $-e$ est la charge de l'électron et $\vec{s}$ un opérateur vectoriel (opérant sur l'indice de la fonction ψ_i) dont les composantes sont représentables par les trois matrices de Pauli :

$$s_1 = {}_d \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad s_2 = {}_d \begin{vmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{vmatrix}, \quad s_3 = {}_d \begin{vmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

on a les relations

$$s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = \mathbf{1};$$

$$s_1 s_2 = -s_2 s_1 = i s_3, \quad s_2 s_3 = -s_3 s_2 = i s_1, \quad s_3 s_1 = -s_1 s_3 = i s_2.$$

3. Les équations non linéaires. — Selon le principe général que nous avons posé au paragraphe précédent, nous adopterons comme équation fondamentale pour l'onde caractérisant un corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ en théorie fonctionnelle non relativiste

$$(5) \quad i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{H}u = Q(u, \nabla),$$

où Q représente le terme non linéaire et où $\mathfrak{H}$ est l'opérateur hamiltonien défini par (4).

Cette équation symbolise deux équations scalaires

$$\mathfrak{H}\left(P, i\hbar \nabla, \vec{s}\right) u_1 + i\hbar \frac{\partial u_1}{\partial t} = Q_1\left(u_1, u_2, \nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$\mathfrak{H}\left(P, i\hbar \nabla, \vec{s}\right) u_2 + i\hbar \frac{\partial u_2}{\partial t} = Q_2\left(u_1, u_2, \nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

(1) W. PAULI, *Z. Physik*, t. 43, 1927, p. 601.

M étant le point variable représentant le corpuscule et de coordonnées x, y, z .

On a alors deux termes non linéaires Q_1 et Q_2 correspondant à chacune des équations.

En tenant compte de la forme de $\mathfrak{H}$ écrite au paragraphe précédent et de l'expression des matrices de Pauli, (5) s'explique en les deux équations

$$(6) \quad i\hbar \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - e\mathcal{V} + \frac{ie\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 + \frac{ie\hbar}{2mc} \operatorname{div} \mathbf{A} \right) u_1 \\ + \frac{e\hbar}{2mc} [(H_1 - iH_2) u_2 + H_3 u_1] = Q_1(u_1, u_2, \nabla),$$

$$(7) \quad i\hbar \frac{\partial u_2}{\partial t} + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - e\bar{\mathcal{V}} + \frac{ie\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 + \frac{ie\hbar}{2mc} \operatorname{div} \mathbf{A} \right) u_2 \\ + \frac{e\hbar}{2mc} [(H_1 + iH_2) u_1 - H_3 u_2] = Q_2(u_1, u_2, \nabla).$$

4. Termes non linéaires dérivant d'un scalaire $\mathcal{H}_0$. — La question la plus importante est celle de la forme des termes non linéaires. Diverses hypothèses peuvent être faites.

En théorie sans spin, comme cela résulte des formules du chapitre I (p. 170), on a la relation

$$Q(u, \nabla) = u \left[Q_J(f, \varphi, \nabla) + \frac{i\hbar}{2f^2} \sigma(f, \varphi, \nabla) \right],$$

avec $u = f e^{ik\varphi}$, alors Q_J est le terme d'autopotential avec $Q_J = {}_d\mathfrak{H}\mathcal{H}$ et σ le terme d'autosource.

Ici deux attitudes sont possibles : ou bien on n'impose aucune limitation aux termes Q_1 et Q_2 , ou bien on ajoute l'hypothèse supplémentaire selon laquelle la formule précédente demeure valable, c'est-à-dire que Q constitue un potentiel scalaire complexe. Examinons d'abord cette dernière hypothèse. Posons alors

$$Q(u, \nabla) = u \mathcal{H}_0(u, \nabla),$$

où $\mathcal{H}_0$ est complexe.

De là il résulte que Q_1 et Q_2 ont pour expression

$$Q_1(u_1, u_2, \nabla) = u_1 \mathcal{H}_0(u_1, u_2, \nabla),$$

$$Q_2(u_1, u_2, \nabla) = u_2 \mathcal{H}_0(u_1, u_2, \nabla).$$

Ces relations ont pour conséquence que Q_1 et Q_2 sont liés par la relation linéaire et homogène

$$u_2 Q_1 = u_1 Q_2.$$

C'est une relation autoduale, en ce sens qu'elle demeure la même si l'on échange u_1 avec Q_1 et u_2 avec Q_2 . Nous avons donc ce théorème :

THÉORÈME 1. — *Si le terme non linéaire Q de l'équation d'ondes physiques d'un corpuscule de Pauli dérive d'un potentiel complexe $\mathcal{N}_0$, les composantes Q_1 et Q_2 du terme non linéaire Q sont liées par la relation linéaire et homogène autoduale*

$$(8) \quad u_2 Q_1 - u_1 Q_2 = 0.$$

En prenant les parties réelles et imaginaires, on voit que

$$Q_{1,1} = Q_{1,2} = \Re \mathcal{N}_0$$

et que

$$\sigma_{Q_1} = \frac{2\rho_1}{\hbar} \Im \mathcal{N}_0, \quad \sigma_{Q_2} = \frac{2\rho_2}{\hbar} \Im \mathcal{N}_0;$$

de là on tire la relation

$$(9) \quad \rho_2 \sigma_{Q_1} = \rho_1 \sigma_{Q_2}.$$

THÉORÈME 2 : RÉCIPROQUE. — *Si entre les composantes Q_1 et Q_2 du terme non linéaire Q de l'équation d'ondes physique d'un corpuscule de Pauli la relation (8) a lieu, alors le terme non linéaire Q dérive d'un potentiel complexe $\mathcal{N}_0$.*

En effet, nous pouvons définir une expression $\mathcal{N}_0$ par la condition

$$\mathcal{N}_0 u_2 u_1 = u_2 Q_1 = u_1 Q_2,$$

d'où

$$Q_1 = u_1 \mathcal{N}_0, \quad Q_2 = u_2 \mathcal{N}_0,$$

ce qui établit que Q dérive d'un potentiel complexe.

§. Hypothèse d'indépendance de Q_1 et Q_2 . — On peut, au contraire, faire l'hypothèse qu'il n'y a aucune relation bilinéaire entre Q_1 et Q_2 . Dans ce cas, le terme Q de l'équation (5) peut être développé sur une base de l'anneau engendré par $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3$. Une telle base est, dans le cas d'un corpuscule du type envisagé ici, formée par les quatre opérateurs $\mathbf{1}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3$ (on a $\mathfrak{s}_i^2 = \mathbf{1}$). Ce développement peut alors être écrit sous la forme

$$(10) \quad Q = (\mathcal{N}_0 \cdot \mathbf{1} + \overrightarrow{\mathcal{N}} \cdot \overrightarrow{\mathfrak{s}}) u,$$

où

$$\overrightarrow{\mathcal{N}} \cdot \overrightarrow{\mathfrak{s}} = \mathcal{N}_1 \cdot \mathfrak{s}_1 + \mathcal{N}_2 \cdot \mathfrak{s}_2 + \mathcal{N}_3 \cdot \mathfrak{s}_3.$$

Cette fois Q apparaît comme constitué par un potentiel scalaire $\mathcal{N}_0$ et un vecteur $\vec{\mathcal{N}}$. A partir de ces formules, on obtiendra les termes Q_1 et Q_2 sans difficulté, et en séparant parties réelles et parties imaginaires, on trouvera les termes $Q_{1,1}$ et $Q_{1,2}$ et les termes de sources σ_1 et σ_2 .

En calculant $\mathfrak{s}_i u_1$ et $\mathfrak{s}_i u_2$, on obtient

$$\vec{\mathcal{N}} \cdot \vec{\mathfrak{s}} u_1 = (\mathcal{N}_1 - i\mathcal{N}_2) u_2 + \mathcal{N}_3 u_1,$$

$$\vec{\mathcal{N}} \cdot \vec{\mathfrak{s}} u_2 = (\mathcal{N}_1 + i\mathcal{N}_2) u_1 - \mathcal{N}_3 u_2,$$

d'où, finalement,

$$(11) \quad Q_1 = (\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_3) u_1 + (\mathcal{N}_1 - i\mathcal{N}_2) u_2,$$

$$(12) \quad Q_2 = (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}_3) u_2 + (\mathcal{N}_1 + i\mathcal{N}_2) u_1.$$

D'où ce théorème :

THÉOREME 3. — *Si $\vec{\mathcal{N}}$ est non identiquement nul, la relation (8) n'a pas lieu entre Q_1 et Q_2 ; réciproquement si la relation (8) n'a pas lieu, Q a la forme (10) avec un terme $\vec{\mathcal{N}}$ non identiquement nul.*

En effet, le développement (10) pour Q peut toujours être posé; on a les expressions (11) pour Q_1 et (12) pour Q_2 ; si (8) n'a pas lieu, il faut montrer que l'un au moins de $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$ est non nul, or

$$u_2 Q_1 - u_1 Q_2 = 2\mathcal{N}_3 u_1 u_2 + (\mathcal{N}_1 - i\mathcal{N}_2) u_2^2 - (\mathcal{N}_1 + i\mathcal{N}_2) u_1^2 \neq 0,$$

l'inégalité ne peut avoir lieu que si $\mathcal{N}_1$ ou $\mathcal{N}_2$ ou $\mathcal{N}_3$ est non nul, ce qui établit la réciproque.

L'hypothèse du premier cas revient à poser $\vec{\mathcal{N}} = 0$, c'est-à-dire que les termes non linéaires s'interprètent uniquement comme potentiel scalaire et terme de source.

Nous n'entrerons pas davantage dans les détails, car nous rencontrerons des circonstances analogues pour un corpuscule de Dirac.

6. Extension au cas d'un corpuscule de Dirac. — D'après le même principe fondamental ⁽¹⁾, à l'équation de Dirac :

$$\mathcal{E}(\psi) = 0$$

qui s'explicite en ⁽²⁾

$$(\mathfrak{p}_4 + \alpha_1 \mathfrak{p}_1 + \alpha_2 \mathfrak{p}_2 + \alpha_3 \mathfrak{p}_3 + \alpha_4 m_0 c) \psi = 0,$$

⁽¹⁾ J.-L. DESTOUCHES, *ibid.*, p. 24.

⁽²⁾ L. DE BROGLIE, *L'électron magnétique* (Hermann, Paris, 1934), p. 140.

nous ferons correspondre, pour l'onde physique u , l'équation

$$\mathcal{E}(u) = Q(u, \nabla).$$

Explicitons cette équation d'après la forme de l'équation de Dirac. Il vient

$$(13) \quad \left[\mathfrak{p}_4 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j \mathfrak{p}_j + \alpha_4 m_0 c \right] u = Q(u, \nabla),$$

où

$$\mathfrak{p}_j = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_j \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}_4 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} + \frac{e}{c} \mathcal{V}.$$

7. Équation dérivant de la forme de von Neumann. — Si l'on désire mieux mettre en évidence l'invariance relativiste, on peut utiliser la forme de von Neumann. Pour cela on adopte l'espace-temps de Minkowski ($\mathbf{M}$) en introduisant la quatrième coordonnée x_4 par

$$x_4 = ict.$$

On définit les opérateurs correspondant à ce choix d'espace-temps

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{\gamma, j} &= {}_d \mathfrak{p}_j, & \mathfrak{p}_{\gamma, 4} &= {}_d i \mathfrak{p}_4 & (j = 1, 2, 3), \\ \Upsilon_j &= {}_d i \alpha_j \alpha_j, & \Upsilon_4 &= \alpha_4. \end{aligned}$$

On obtient l'équation des ondes ψ en multipliant par $i\alpha_4$ l'équation de Dirac et, avec ces notations, elle prend la forme

$$\left(\sum_{i=1}^4 \Upsilon_i \mathfrak{p}_{\gamma, i} + im_0 c \right) \psi = 0.$$

A cette forme de l'équation des ondes ψ correspond pour les ondes physiques u l'équation obtenue en multipliant (13) par $i\alpha_4$ et en adoptant les notations précédentes; posons alors

$$Q_{\gamma}(u, \nabla) = {}_d i \alpha_4 Q(u, \nabla, \partial_t),$$

nous obtenons comme forme d'équation du type von Neumann

$$(14) \quad \left(\sum_{k=1}^4 \Upsilon_k \mathfrak{p}_{\gamma, k} + im_0 c \right) u = Q_{\gamma}(u, \nabla),$$

Dans les développements qui suivent on peut au choix adopter la forme primitive de Dirac ou la forme de von Neumann; dans le premier cas on adopte l'équation (13) comme équation fondamentale, dans le

second cas on part de l'équation (14). Il y a équivalence entre ces deux équations, car en multipliant (14) par $-i\alpha_4$ on retombe sur l'équation (13) (rappelons que $\alpha_i^2 = 1$ et que les α anticommulent entre eux). Dans ce chapitre nous adopterons la forme primitive de Dirac et le lecteur pourra sans aucune difficulté transcrire immédiatement dans la forme de von Neumann les diverses formules obtenues.

8. Hypothèses sur la forme des termes non linéaires. — La théorie peut être développée de plusieurs manières, soit en n'imposant aucune condition au terme non linéaire Q , soit en posant que le terme Q dérive d'un quadrivecteur autopotentiel complexe; de là dérive une condition imposée à Q ; soit, comme le fait Heisenberg ⁽¹⁾, en se limitant au terme invariant $\mathcal{N}_0$, de façon à avoir diverses masses (il pose $m_0 = 0$). Dans ce cas $-Q = \mathcal{N}_0 \alpha_4 u$ (avec $\mathcal{N}_0 = u^* u$), d'où

$$Q_1 = -\mathcal{N}_0 u_1, \quad Q_2 = -\mathcal{N}_0 u_2, \quad Q_3 = \mathcal{N}_0 u_3, \quad Q_4 = \mathcal{N}_0 u_4.$$

On a alors trois relations entre les $u_j Q_j$; et (20) (p. 183), en découle. On ne peut dire pour le moment laquelle de ces hypothèses est adéquate à l'expérience; seul un développement ultérieur de la théorie permettra de décider si l'on peut restreindre la forme du terme Q par certaines conditions. Si l'on n'impose aucune condition à Q , on applique le principe général (§2, p. 174). Si l'on impose à Q de dériver d'un quadrivecteur, on pose qu'une généralisation de la première équation du §4 (p. 176) est valable.

9. Cas où Q dérive d'un quadrivecteur. — L'équation (13) désigne un système de quatre équations aux dérivées partielles. Le second membre Q représente quatre composantes Q_i . A première vue, on pourrait penser que, sans aucune restriction sur la forme des Q , on pourrait grouper les quatre termes Q_i en les composantes d'un quadrivecteur. Mais ceci n'est pas possible car le déterminant du système d'équations linéaires obtenu ainsi est nul. Il n'y a de solution possible que s'il existe une relation linéaire entre les Q_i .

Examinons ceci; dire que le terme Q dérive d'un quadrivecteur, c'est dire que nous pouvons mettre l'équation (13) sous la forme

$$(15) \quad \left[\mathfrak{p}_4 + \sum_i \alpha_i \mathfrak{p}_i + \alpha_4 m_0 c \right] u = 0,$$

(1) W. HEISENBERG, *Rev. Mod. Phys.*, t. 29, 1957, p. 269.

où

$$\mathfrak{p}_\beta = p_\beta + \mathcal{N}_\beta.$$

Les $\mathfrak{p}_\beta$ sont ceux définis juste après l'équation (13) et les $\mathcal{N}_\beta$ sont, en vertu de l'hypothèse faite, les composantes d'un quadrivecteur autopotentiel complexe contenant autopotentiel et autosource. (Ceci est la généralisation relativiste de l'autopotentiel scalaire complexe de la théorie non relativiste.)

Si le terme Q dérive d'un quadrivecteur, les équations (13) et (15) sont identiques. Identifions-les :

$$\left[\mathfrak{p}_i + \sum_l \alpha_l \mathfrak{p}_l + \alpha_i m_0 c \right] u = \left[p_i + \sum_l \alpha_l p_l + \alpha_i m_0 c \right] u - Q(u, \nabla),$$

ce qui nous donne, en remplaçant les $\mathfrak{p}_\beta$ par leur expression et en supprimant les termes communs,

$$(16). \quad \left[\mathcal{N}_i + \sum_{l=1}^3 \alpha_l \mathcal{N}_l \right] u = -Q(u, \nabla).$$

Si $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4$ sont connus, on en déduit immédiatement Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 qui sont alors fixés univoquement. Inversement, (16) peut être considéré comme un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4$ qui permettrait de déterminer les $\mathcal{N}_\beta$ en fonction des Q_i si le déterminant du système était non nul, mais ce déterminant est nul, les ψ de l'équation de Dirac constituant un spineur.

Explicitons le système (16), il s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{il} \mathcal{N}_i.(\alpha_i)_{1l} u_l + \mathcal{N}_4.u_1 + Q_1 &= 0, \\ \sum_{il} \mathcal{N}_i.(\alpha_i)_{2l} u_l + \mathcal{N}_4.u_2 + Q_2 &= 0, \\ \sum_{il} \mathcal{N}_i.(\alpha_i)_{3l} u_l + \mathcal{N}_4.u_3 + Q_3 &= 0, \\ \sum_{il} \mathcal{N}_i.(\alpha_i)_{4l} u_l + \mathcal{N}_4.u_4 + Q_4 &= 0. \end{aligned}$$

La forme des matrices α est telle que sur une ligne, il n'y a qu'un élément non nul, de même sur une colonne, et cet élément est $+1, -1, +i, -i$ selon le cas. En effectuant le calcul, le système (16)

prend la forme suivante :

$$(17) \quad \begin{cases} (\mathcal{N}_1 + i\mathcal{N}_2)u_3 + \mathcal{N}_3 u_3 + \mathcal{N}_4 u_1 + Q_1 = 0, \\ (\mathcal{N}_1 - i\mathcal{N}_2)u_3 - \mathcal{N}_3 u_3 + \mathcal{N}_4 u_2 + Q_2 = 0, \\ (\mathcal{N}_1 + i\mathcal{N}_2)u_2 + \mathcal{N}_3 u_1 + \mathcal{N}_4 u_3 + Q_3 = 0, \\ (\mathcal{N}_1 - i\mathcal{N}_2)u_1 - \mathcal{N}_3 u_2 + \mathcal{N}_4 u_3 + Q_4 = 0. \end{cases}$$

Dans ce système d'équations (17), les $\mathcal{N}_3$ sont les inconnues, les Q_i et les u_j sont considérés comme des coefficients donnés.

Ordonnons les termes de ce système, il vient

$$(18) \quad \begin{cases} u_4 \mathcal{N}_1 + iu_4 \mathcal{N}_2 + u_3 \mathcal{N}_3 + u_1 \mathcal{N}_4 + Q_1 = 0, \\ u_3 \mathcal{N}_1 - iu_3 \mathcal{N}_2 - u_4 \mathcal{N}_3 + u_2 \mathcal{N}_4 + Q_2 = 0, \\ u_2 \mathcal{N}_1 + iu_2 \mathcal{N}_2 + u_1 \mathcal{N}_3 + u_3 \mathcal{N}_4 + Q_3 = 0, \\ u_1 \mathcal{N}_1 - iu_1 \mathcal{N}_2 - u_2 \mathcal{N}_3 + u_4 \mathcal{N}_4 + Q_4 = 0. \end{cases}$$

Calculons le déterminant D de ce système, il s'écrit

$$D = \begin{vmatrix} u_4 & iu_4 & u_3 & u_1 \\ u_3 & -iu_3 & -u_4 & u_2 \\ u_2 & iu_2 & u_1 & u_3 \\ u_1 & -iu_1 & -u_2 & u_4 \end{vmatrix}.$$

Mettons i en facteur, puis ajoutons la première colonne à la seconde, il vient

$$(19) \quad D = i \begin{vmatrix} u_4 & 2u_4 & u_3 & u_1 \\ u_3 & 0 & -u_4 & u_2 \\ u_2 & 2u_2 & u_1 & u_3 \\ u_1 & 0 & -u_2 & u_4 \end{vmatrix}.$$

Développons ce déterminant par rapport à la deuxième colonne :

$$D = -2iu_4 \begin{vmatrix} u_3 & -u_4 & u_2 \\ u_2 & u_1 & u_3 \\ u_1 & -u_2 & u_4 \end{vmatrix} - 2iu_2 \begin{vmatrix} u_4 & u_3 & u_1 \\ u_3 & -u_4 & u_2 \\ u_1 & -u_2 & u_4 \end{vmatrix}.$$

Les deux déterminants du troisième rang se développent immédiatement, on constate que les termes se détruisent deux à deux, d'où

$$D = 0,$$

donc, d'après le théorème de Rouché et Fontené, si l'on donne Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 quelconques, il n'y a pas de solution. S'il existe une relation convenable entre les Q_i , il y aura une infinité de solutions pour les $\mathcal{N}_k$. (Ceci est en accord avec le fait qu'il y a toujours une certaine indéter-

mination sur un potentiel.) Pour trouver cette relation, multiplions la première équation du système (18) par u_2 , la seconde par u_1 , la troisième par u_4 la quatrième par u_3 et soustrayons la troisième de la première et la quatrième de la deuxième pour éliminer $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$. Soustrayons ces deux équations l'une de l'autre pour éliminer $\mathcal{N}_3$ et $\mathcal{N}_4$, il reste

$$(20) \quad u_2 Q_1 - u_1 Q_2 - u_4 Q_3 + u_3 Q_4 = 0.$$

On remarquera que cette relation est autoduale : si l'on change u_i en Q_i et Q_j en u_j , la relation demeure inchangée, car l'expression entière change de signe, donc demeure nulle. Les u_i constituent un autre spineur que les Q_j . La relation est invariante, d'où :

THÉOREME 1. — *Si les composantes Q_i du terme non linéaire de l'équation (13) des ondes u dérivent d'un quadrivecteur $\vec{\mathcal{N}}$ (autopotentiel quadrivectoriel complexe), alors nécessairement entre les seconds membres Q_i des quatre équations en u_i , on a la relation (20).*

La condition (20) est nécessaire, elle est aussi suffisante. En effet, d'après le théorème de Rouché et Fontené, s'il y a un déterminant non identiquement nul du troisième rang, nous obtiendrons les solutions $\mathcal{N}_k$ en fonction des Q_i . Or un de ces déterminants extrait de (19) est

$$\begin{vmatrix} u_4 & 2u_4 & u_3 \\ u_3 & 0 & -u_4 \\ u_2 & 2u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 2u_3(u_2u_3 - u_1u_4) \neq 0,$$

il n'y a donc pas besoin d'autres relations entre les Q_i que la relation (20), d'où ce théorème :

THÉOREME 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les Q_i dérivent d'un quadrivecteur $\vec{\mathcal{N}}$ est qu'entre les Q_i on ait la relation invariante (20).*

A partir de ce résultat, on peut construire une théorie fonctionnelle non linéaire des corpuscules de Dirac en Relativité restreinte comme dans le cas non relativiste et sans spin ⁽¹⁾. On doit notamment distinguer des ondes monochromatiques, des ondes à phase linéaire en relation étroite avec le principe de l'inertie, des ondes limites à phase linéaire, etc. On ne rencontre pas de difficultés dans ce développement.

⁽¹⁾ J.-L. DESTOUCHES, *Quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules*, chap. II, III, IV, etc., p. 27 et suiv.

M. Bonjean a émis l'idée que les termes Q_i devaient dériver d'un quadrivecteur autopotentiel. Les résultats précédents montrent que cette idée est acceptable et permet un développement cohérent de la théorie, mais on ne voit pas actuellement de raison pour l'adopter. Dans ce cas on a la relation (20) entre les Q_i .

10. **Théorie sans condition sur les Q_i .** — Envisageons maintenant l'autre possibilité où l'on n'impose aucune condition aux Q_i . Dans ce cas, partons de l'équation fondamentale

$$\mathcal{E}(u) = Q(u, \nabla)$$

qui se décompose en quatre équations

$$\mathfrak{F}u_1 = Q_1, \quad \mathfrak{F}u_2 = Q_2, \quad \mathfrak{F}u_3 = Q_3, \quad \mathfrak{F}u_4 = Q_4,$$

où $\mathfrak{F}$ est l'opérateur linéaire de l'équation de Dirac

$$\mathfrak{F} = a p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0 c.$$

On pourrait considérer tout aussi bien la forme de von Neumann de l'équation de Dirac; $\mathfrak{F}$ serait alors remplacé par $\mathfrak{F}_\gamma = a i \alpha_4 \mathfrak{F}$ et l'on utiliserait les notations de von Neumann; Q serait alors à remplacer par Q_γ et les α seraient remplacés par les γ .

On peut toujours poser

$$(21) \quad Q_i = \sum_j Q_{ij}(u, \nabla) \cdot u_j,$$

car on peut toujours poser (dans un certain système de référence particulier)

$$Q_1 = Q_{11}u_1, \quad Q_2 = Q_{22}u_2, \quad Q_3 = Q_{33}u_3, \quad Q_4 = Q_{44}u_4,$$

donc *a fortiori* (21) et ceci définit une matrice Q d'éléments Q_{ij} (ici prise sous forme diagonale). Mais comme il y a des conditions de variance à respecter, elle ne reste pas diagonale si l'on change de système de référence (transformation de Lorentz). On doit donc considérer une matrice Q_{ij} . On peut toujours poser

$$Q = \sum_{ij} Q_{ij} E_{ij},$$

où les Q_{ij} sont les éléments de la matrice Q et les E_{ij} sont les matrices unités formant une base de 16 éléments

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

11. Développement de Q sur la base des α . — Une autre base est formée par les 16 matrices α de Dirac dont nous allons rappeler la forme ⁽¹⁾:

$$\alpha_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$i\alpha_2\alpha_3\alpha_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad i\alpha_3\alpha_1\alpha_5 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix},$$

$$i\alpha_1\alpha_2\alpha_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$i\alpha_1\alpha_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad i\alpha_2\alpha_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$i\alpha_3\alpha_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$i\alpha_2\alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad i\alpha_3\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix},$$

$$i\alpha_1\alpha_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\alpha_5 = {}_d\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\sigma_1 = {}_d i\alpha_2\alpha_3, \quad \sigma_2 = {}_d i\alpha_3\alpha_1, \quad \sigma_3 = {}_d i\alpha_1\alpha_2, \quad \sigma_4 = {}_d i\alpha_1\alpha_2\alpha_3;$$

(¹) Voir par exemple, L. DE BROGLIE, *l'Électron magnétique*, p. 217 et 227.

α_4 définit un invariant; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mathbf{1}$ définissent un quadrivecteur; $i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, i\alpha_3\alpha_1\alpha_4, i\alpha_1\alpha_2\alpha_4, i\alpha_1\alpha_4, i\alpha_2\alpha_4, i\alpha_3\alpha_4$ définissent un tenseur antisymétrique du second rang, $i\alpha_3\alpha_4, i\alpha_3\alpha_1, i\alpha_1\alpha_2, i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ définissent un tenseur complètement antisymétrique du troisième rang, c'est-à-dire un pseudo-vecteur, enfin $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ définit un tenseur complètement antisymétrique du quatrième rang, c'est-à-dire un pseudo-invariant. Au lieu de la notation en α , on aurait pu aussi bien adopter la notation en γ ; on écrirait sans peine l'expression des grandeurs ainsi définies au moyen des γ .

Ces 16 matrices α_j constituent une base sur laquelle on peut développer la matrice Q , soit

$$Q = \sum_{k=1}^{16} \mathcal{N}_k \alpha_k,$$

alors

$$Q_i(u, \nabla) = \sum_{k=1}^{16} \mathcal{N}_k(u, \nabla) \alpha_k u_i$$

ou encore le terme $Q(u, \nabla)$ de l'équation fondamentale prendra la forme

$$Q(u, \nabla) = \sum_{k=1}^{16} \mathcal{N}_k(u, \nabla) \alpha_k u.$$

Si les $\mathcal{N}_k$ sont donnés, Q se trouve déterminé. Inversement pour tout Q , il y a des développements de cette forme, mais les 16 quantités $\mathcal{N}_i$ ne sont pas univoquement déterminées à partir des quatre expressions Q_j . On peut alors chercher diverses expressions où le nombre des $\mathcal{N}_k$ soit aussi réduit que possible tout en s'exprimant en fonction des Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sans aucune condition sur les Q_j .

Les résultats du paragraphe 9 nous montrent qu'on ne peut pas réduire le développement aux termes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mathbf{1}$, sans qu'il y ait de relation entre les Q_j , et nous allons voir que cette relation subsiste si l'on ajoute les termes α_4 et $\alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$.

D'une façon plus détaillée, supposons, en nous plaçant dans un système de référence particulier sans nous préoccuper pour le moment de conditions d'invariance :

1° Que les Q_j s'expriment à partir d'un seul $\mathcal{N}_k$, par exemple $\mathcal{N}_1$, alors on voit en se reportant au système (16) et en annulant tous les $\mathcal{N}_k$ pour $k \neq 1$ que

$$u_4 \mathcal{N}_1 + Q_1 = 0, \quad u_3 \mathcal{N}_1 + Q_2 = 0, \quad u_2 \mathcal{N}_1 + Q_3 = 0, \quad u_1 \mathcal{N}_1 + Q_4 = 0$$

et il y a trois relations entre les Q_j obtenues en éliminant $\mathcal{N}_1$ des relations précédentes

$$-u_3 Q_1 + u_4 Q_2 = 0, \quad -u_2 Q_1 + u_4 Q_3 = 0, \quad -u_1 Q_1 + u_4 Q_4 = 0.$$

Inversement si les Q_j satisfont à ces relations, on tire immédiatement des équations précédentes l'expression de $\mathcal{N}_1$ en fonction des Q_j .

2° Que les Q_j s'expriment à partir de deux $\mathcal{N}$; il y a deux relations entre les Q_j ; soient $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, alors en se reportant au système (16) et en annulant $\mathcal{N}_3$ et $\mathcal{N}_4$, on a

$$\mathcal{N}_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{u_4} + \frac{Q_2}{u_3} \right), \quad \mathcal{N}_2 = \frac{i}{2} \left(\frac{Q_1}{u_4} - \frac{Q_2}{u_3} \right)$$

et entre les Q_j on a les deux relations duales l'une de l'autre

$$-u_2 Q_1 + u_4 Q_3 = 0, \quad -u_1 Q_2 + u_3 Q_4 = 0.$$

3° Que les Q_j s'expriment à partir de $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$; on voit, en se reportant au système (16) et en annulant $\mathcal{N}_4$, qu'on obtient $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ en fonction des Q_j et qu'il reste une seule relation entre les Q_j qui n'est autre que la relation (20).

4° Que les Q_j s'expriment à partir de $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4$; nous sommes dans le cas examiné au paragraphe précédent, il y a la relation (20) entre les quatre Q_j . Si elle est remplie, on peut exprimer les $\mathcal{N}_k$ à partir des Q_j avec une indétermination.

Si l'on exprime les $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ à partir des Q_j , alors si $\mathcal{N}_4$ est posé nul (cas 3°) pour un certain repère, et si l'on effectue une transformation de Lorentz, $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4$ se comportant comme un quadri-vecteur, on aura dans le nouveau système quatre composantes non nulles en général, et la relation (20) entre les Q_j et u_i conservera sa forme invariante.

5° Si les Q_j s'expriment à partir de $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4$ les termes en $\mathcal{N}_4$ du système (16) sont à remplacer successivement dans les quatre équations par $u_1(\mathcal{N}_4 + \mathcal{N}_0), u_2(\mathcal{N}_4 + \mathcal{N}_0), u_3(\mathcal{N}_4 - \mathcal{N}_0), u_4(\mathcal{N}_4 - \mathcal{N}_0)$. Là encore on constate que tous les déterminants de rang 4 sont nuls et qu'il existe entre les Q_i la même relation (20). Il y a indétermination entre les $\mathcal{N}_k$ et l'on peut soit poser $\mathcal{N}_0 = 0$, soit poser cet invariant non nul, ce qui permet d'avoir diverses valeurs de la masse comme Heisenberg ⁽¹⁾ l'a indiqué.

(1) W. HEISENBERG, *Rev. Mod. Phys.*, t. 29, 1957, p. 269.

6° Si les Q_j s'expriment à partir de $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_4, \mathcal{N}_5$, on constate que la même relation (20) entre les Q_j a lieu. Il y a indétermination entre les $\mathcal{N}_k$; on peut poser soit $\mathcal{N}_0 = 0$ et $\mathcal{N}_5 = 0$, soit conserver un ou les deux non nuls; $\mathcal{N}_5$ est un pseudo-invariant; on a donc :

THÉOREME 3. — *Si le développement de Q sur la base des α ne comprend des termes non nuls que pour $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, \mathbf{1}, \alpha_5$ (dont les coefficients sont respectivement $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4, \mathcal{N}_5$), alors la relation (20) a lieu entre les Q_j .*

Des indéterminations entre les $\mathcal{N}_i$ dans ce cas, il résulte que l'on a :

THÉOREME 4. — *Si le développement de Q sur la base de α comprend un quadrivecteur non nul $\vec{\mathcal{N}}$ dont les composantes sont les coefficients de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mathbf{1}$, alors on peut, sans imposer de condition nouvelle aux Q_j , annuler les termes en α_1 et α_5 (invariant et pseudo-invariant) ou bien conserver l'un ou les deux non nuls.*

Pour que la relation (20) n'ait pas lieu, il faut qu'il y ait d'autres termes non nuls que $\alpha_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mathbf{1}, \alpha_5$ dans le développement de Q sur la base des α , donc :

THÉOREME 5. — *S'il n'y a aucune relation entre les Q_j , le développement de Q sur la base des α comprend des termes de couplage tensoriel, soit couplage entre opérateurs α de moment électrique propre et de moment magnétique propre avec un autochamp électromagnétique $\mathcal{N}_{ij}$, soit couplage entre opérateurs α de spin avec un autochamp pseudo-vectoriel.*

12. Réduction du développement de Q . — Les théorèmes précédents expriment donc que s'il n'y a aucune relation entre Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , alors dans le développement de Q sur la base des α ,

$$Q = \sum_{i=0}^{15} \mathcal{N}_i \alpha_i u,$$

il y a des termes non nuls pour $i > 5$, et de plus s'il y a des termes $\mathcal{N}_i$ non nuls parmi $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4$, on peut poser $\mathcal{N}_0 = 0$ et $\mathcal{N}_5 = 0$. Donc le développement de Q peut être réduit à 14 termes; il en comprend évidemment au moins quatre puisqu'il y a quatre expressions Q_i .

Montrons qu'il existe au moins un développement de quatre termes (non invariant) sans relations entre les Q_i . Il suffit de prendre par

exemple les quatre opérateurs diagonaux $(^1)$, à savoir α_4 , $\mathbf{1}$, $i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $i\alpha_1\alpha_2$. Le système se réduit alors à

$$\begin{aligned} u_1(\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_4 + \mathcal{N}_{124} + \mathcal{N}_{12}) &= -Q_1, \\ u_2(\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_4 - \mathcal{N}_{124} - \mathcal{N}_{12}) &= -Q_2, \\ u_3(-\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_4 - \mathcal{N}_{124} + \mathcal{N}_{12}) &= -Q_3, \\ u_4(-\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_4 + \mathcal{N}_{124} - \mathcal{N}_{12}) &= -Q_4, \end{aligned}$$

et l'on obtient aisément, par des additions ou soustractions des équations précédentes,

$$\begin{aligned} 4\mathcal{N}_{12} &= -\frac{Q_1}{u_1} + \frac{Q_2}{u_2} - \frac{Q_3}{u_3} + \frac{Q_4}{u_4}, \\ 4\mathcal{N}_{124} &= -\frac{Q_1}{u_1} + \frac{Q_2}{u_2} + \frac{Q_3}{u_3} - \frac{Q_4}{u_4}, \\ 4\mathcal{N}_4 &= -\frac{Q_1}{u_1} - \frac{Q_2}{u_2} - \frac{Q_3}{u_3} - \frac{Q_4}{u_4}, \\ 4\mathcal{N}_0 &= -\frac{Q_1}{u_1} - \frac{Q_2}{u_2} + \frac{Q_3}{u_3} + \frac{Q_4}{u_4}. \end{aligned}$$

Si l'on effectue une transformation de Lorentz quelconque, alors ce développement se fait avec d'autres coefficients et les termes se groupent suivant leur variance. Il y a un terme de type α_4 (invariant), quatre termes de type $\mathbf{1}$ (quadrivecteur), six termes de type $i\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ (tenseur antisymétrique de deuxième rang), quatre termes de type $i\alpha_1\alpha_2$ (pseudovecteur); on a un *développement de forme invariante de 15 termes*.

Mais on peut trouver pour exprimer les Q_i d'autres bases de quatre matrices qui ne donnent pas lieu à un développement aussi large. Prenons, par exemple, les matrices à coefficients 1, soit $\mathfrak{a}_1 = \alpha_1$, $\mathfrak{a}_2 = \mathbf{1}$, $\mathfrak{a}_3 = i\alpha_2\alpha_3$, $\mathfrak{a}_4 = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Le système à résoudre prend la forme

$$\begin{aligned} u_4\mathcal{N}_1 + u_1\mathcal{N}_2 + u_2\mathcal{N}_3 + u_3\mathcal{N}_4 + Q_1 &= 0, \\ u_3\mathcal{N}_1 + u_2\mathcal{N}_2 + u_1\mathcal{N}_3 + u_4\mathcal{N}_4 + Q_2 &= 0, \\ u_2\mathcal{N}_1 + u_3\mathcal{N}_2 + u_4\mathcal{N}_3 + u_1\mathcal{N}_4 + Q_3 &= 0, \\ u_1\mathcal{N}_1 + u_4\mathcal{N}_2 + u_3\mathcal{N}_3 + u_2\mathcal{N}_4 + Q_4 &= 0. \end{aligned}$$

Le déterminant du système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_4 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_3 & u_2 & u_1 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 & u_1 \\ u_1 & u_4 & u_3 & u_2 \end{vmatrix} = u_1^2(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - u_1^2) - 2u_2u_3u_4 + \text{perm. circ.}$$

(¹) Voir le tableau des α , p. 185.

Δ n'est pas identiquement nul. Comme α_1 et $\mathbf{1}$ appartiennent au groupement du quadrivecteur et $i\alpha_2\alpha_3$ et $i\alpha_4\alpha_2\alpha_3$ au groupement du spin (pseudo-vecteur), on peut représenter les Q_j d'une façon invariante sur une base de huit éléments, donc on peut écrire

$$Q = \alpha_1 \mathcal{N}_1 + \alpha_2 \mathcal{N}_2 + \alpha_3 \mathcal{N}_3 + \mathbf{1} \mathcal{N}_4 + \sigma_1 \mathcal{N}_{23} + \sigma_2 \mathcal{N}_{31} + \sigma_3 \mathcal{N}_{12} + \sigma_4 \mathcal{N}_{123}.$$

Prenons un autre exemple de réduction à quatre éléments :

$$b_1 = i\alpha_2\alpha_1, \quad b_2 = i\alpha_1\alpha_2\alpha_1, \quad b_3 = i\alpha_2\alpha_3\alpha_1, \quad b_4 = i\alpha_3\alpha_1.$$

Alors, dans ce cas, le système à résoudre est

$$\begin{aligned} u_1 \mathcal{N}_{24} + u_1 \mathcal{N}_{124} + u_2 \mathcal{N}_{234} - iu_3 \mathcal{N}_{34} + Q_1 &= 0, \\ -u_3 \mathcal{N}_{24} - u_2 \mathcal{N}_{124} + u_1 \mathcal{N}_{234} + iu_1 \mathcal{N}_{34} + Q_2 &= 0, \\ -u_2 \mathcal{N}_{24} - u_3 \mathcal{N}_{124} - u_4 \mathcal{N}_{234} + iu_1 \mathcal{N}_{34} + Q_3 &= 0, \\ u_1 \mathcal{N}_{24} + u_4 \mathcal{N}_{124} - u_3 \mathcal{N}_{234} - iu_2 \mathcal{N}_{34} + Q_4 &= 0. \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta' = \begin{vmatrix} u_4 & u_1 & u_2 & -iu_3 \\ -u_3 & -u_2 & u_1 & iu_1 \\ -u_2 & -u_3 & -u_4 & iu_1 \\ u_1 & u_4 & -u_3 & -iu_2 \end{vmatrix}.$$

En développant le déterminant, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta' = & -i[u_1^2(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2) - u_2^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2) \\ & - u_3^2(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2) - u_4^2(u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)]. \end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas identiquement nul, donc on peut avoir un développement de Q sur une base de quatre termes appartenant au groupement tenseur antisymétrique du deuxième rang. Ce développement n'est pas invariant et l'on obtiendra un développement invariant en prenant une base à six éléments formée par les éléments du groupement tenseur antisymétrique du deuxième rang. Les termes non linéaires dans ce cas expriment un couplage des moments électrique et magnétique propres avec un autochamp électromagnétique. Mais s'il y a un autochamp électromagnétique, il doit lui être associé un autopotentiel quadrivectoriel, ce qui porterait à 10 le nombre des éléments de la base, d'où :

THÉOREME 6. — *Si les termes non linéaires Q_j ne sont liés par aucune relation analogue à (20), dans un système de référence particulier le développement de Q sur la base des α peut être réduit à*

quatre termes et cela de plusieurs façons; ce développement peut comprendre un nombre quelconque de termes entre 4 et 16.

Dans un système de référence quelconque, le développement de Q sur la base des α sous forme invariante comprend au moins six termes : les termes du tenseur antisymétrique du second rang; il peut comprendre huit termes : ceux du quadrivecteur et ceux du pseudo-vecteur; il peut comprendre 10 termes : ceux du tenseur antisymétrique du second rang et ceux du quadrivecteur. Il peut encore comprendre 14 termes : développement obtenu en prenant tous ces termes à la fois. Enfin, à chacun de ces développements on peut adjoindre, soit le terme invariant, soit le terme pseudo-invariant, soit les deux. Le développement peut ainsi comprendre de 6 à 16 termes, sauf 13. Le choix des $\mathcal{N}_i$ est limité par le fait qu'ils doivent être formés à partir de u avec la variance convenable.

13. Les quatre points de vue sur les termes non linéaires. — Finalement il apparaît quatre points de vue pour développer la théorie :

1° On pose que la relation fondamentale est celle exprimant les termes non linéaires à partir d'un autopotentiel. Alors les termes non linéaires dérivent d'un autopotentiel quadrivectoriel $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_4$ et l'on a la relation linéaire (20) entre les Q_j .

2° On pose que la notion fondamentale est celle de terme non linéaire Q , et que l'on a quatre termes Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 indépendants. Dans ce cas ils doivent avoir une expression invariante si on les développe sur la base des α . On peut envisager plusieurs développements : *a.* développement sur les six termes de moment électrique et magnétique propre; *b.* développement sur les huit termes quadrivecteur potentiel et pseudo-vecteur spin; *c.* développement sur les dix termes électromagnétiques : potentiels et moments; *d.* développement sur les 14 termes électromagnétiques et spin; *e.* à chacun de ces cas on peut ajouter le terme invariant ou le terme pseudo-invariant ou les deux. Un développement invariant peut donc comprendre 6, 8, 10, 14 termes auxquels on peut en ajouter un ou deux, donc de 6 à 16 termes, sauf 13.

3° On pose que la notion fondamentale est celle de quantités $\mathcal{N}_k$ de variance définie autoproduites par l'onde u et que les Q_j ne sont que des expressions dérivant des $\mathcal{N}_k$. Dans ce cas, les Q_j sont des sommes de termes de la forme $\sum_k \mathcal{N}_k \alpha_k u_j$. Ce cas est une généralisation du cas 1°

et l'on peut avoir divers développements selon les variances des termes $\mathcal{H}_k$ qui vont se présenter; le nombre de ces termes, par suite de $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_8$, peut être de 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16.

4° On pose comme Heisenberg dans ses premiers essais que le développement ne comprend que le terme invariant $\mathcal{H}_0$.

Avant que la théorie soit développée davantage, on ne peut dire lequel de ces quatre points de vue doit être adopté, ni (dans les cas 2° et 3°) quels sont les termes non nuls du développement de Q sur la base des α .

14. **Introduction du spin isotopique.** — On considère le proton et le neutron comme deux états d'une seule particule, le *nucléon*; on doit alors introduire des opérateurs de type nouveau caractérisant le « spin isotopique » pour décrire les deux masses et les deux charges que possède le nucléon dans l'état proton et dans l'état neutron. Ceci n'apporte pas de complication à la théorie fonctionnelle des corpuscules. A l'équation $\mathcal{E}(\psi) = 0$ de la Mécanique ondulatoire, nous ferons correspondre encore dans ce cas une équation non linéaire pour l'onde physique u , d'après le principe général (§ 2, p. 174) :

$$(22) \quad \mathcal{E}(u) = Q(u, \nabla).$$

Nous devons alors, comme dans le cas d'un corpuscule de Dirac, envisager diverses possibilités pour le terme non linéaire Q .

La partie linéaire $\mathcal{E}(u)$ a la même forme que dans le cas de Dirac, mais la masse numérique m_0 est à remplacer par l'opérateur de masse m et la charge électrique, par l'opérateur de charge q . On peut poser

$$(23) \quad m = \frac{1}{2} [(m_P + m_N)\mathbf{1} + (m_P - m_N)\tau_z], \quad q = \frac{e}{2} (\mathbf{1} + \tau_z),$$

où τ_x, τ_y, τ_z sont les matrices de Pauli de rang 2 qui forment une base d'un anneau à condition de les compléter par l'unité $\mathbf{1}$. On doit faire le produit direct de l'anneau de spin isotopique par l'anneau des α pour constituer l'anneau des opérateurs du nucléon.

On peut alors, pour le nucléon comme pour l'électron de Dirac, envisager plusieurs façons de développer la théorie. L'équation (22) prend la forme explicite

$$\left[p_4 + \sum a_i p_i + a_4 m c \right] u = Q(u, \nabla),$$

où

$$p_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{c} q \mathbf{A}_i, \quad p_4 = -\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c} q \mathcal{V},$$

q étant l'opérateur défini par (23).

On peut alors, pour le nucléon comme pour l'électron de Dirac, envisager plusieurs façons de développer la théorie : 1° on peut poser la condition suivante : quand on sait que le nucléon est, soit dans l'état proton, soit dans l'état neutron, il se comporte strictement comme un corpuscule de Dirac. Si l'on fait cette hypothèse, de la forme du terme Q pour un corpuscule de Dirac, on déduit immédiatement sa forme pour un nucléon. Le spin isotopique apparaît dans ce cas comme un procédé formel pour réunir en un seul deux types de corpuscules sans lien véritable; 2° on peut, au contraire, ne pas imposer la condition précédente au nucléon. Alors cette fois les termes non linéaires introduisent une liaison intrinsèque entre les deux états du nucléon (liaison qui n'apparaît pas à l'approximation linéaire).

Comme dans le cas du corpuscule de Dirac, le terme Q se décompose en des termes correspondant à chaque équation. Ici on aura huit équations de la forme

$$\mathfrak{L}_i u_i = Q_i(u, \nabla) \quad (i = 1, \dots, 8),$$

où $\mathfrak{L}_i$ est un opérateur linéaire. On peut, comme dans le cas de Dirac, développer Q sur la base de l'anneau fondamental, mais ici une base complète est formée par $16 \times 4 = 64$ éléments, soit

$$Q^{(1)} = \sum_{i,j=1}^{16,4} \mathcal{N}_{i,j}^{(1)} \alpha_i \odot \tau_j.$$

Cette fois encore on peut faire diverses hypothèses pour réduire le développement. Si les termes non linéaires dérivent d'un quadripotentiell (cas 1°), on n'aura que quatre valeurs pour l'indice i , soit $\mathcal{N}_{1,j}$, $\mathcal{N}_{2,j}$, $\mathcal{N}_{3,j}$, $\mathcal{N}_{4,j}$; si l'on ne fait pas cette hypothèse, mais une autre parmi celles envisagées au chapitre précédent, on aura davantage de termes dans le développement. Pour faire un choix fondé, il faut attendre que la théorie ait été développée davantage.

15. La fusion des corpuscules et le photon. — La méthode faisant correspondre à une équation de Mécanique ondulatoire $\mathcal{E}(\psi) = 0$ une équation non linéaire $\mathcal{E}(u) = Q(u, \nabla)$ pour l'onde physique u s'étend sans difficulté au cas des corpuscules de spin quelconque, obtenus par

la méthode de fusion, en particulier à tout corpuscule de spin 1. Les termes non linéaires peuvent introduire des liaisons entre les constituants du corpuscule fondu ou entre les divers états de spin de ce corpuscule ou divers états de masse (comme cela s'est présenté pour le nucléon), ce que ne donne pas la théorie linéaire.

Bornons-nous à traiter dans le détail le cas du photon de M. Louis de Broglie (particule non chargée, de spin maximum 1, obtenue par fusion). Le cas de particules chargées ou de particules provenant de la fusion de deux corpuscules possédant un spin isotopique se traite de la même façon.

On part de deux demi-photons obéissant à des équations de Dirac ⁽¹⁾

$$\mathfrak{F}\psi = 0, \quad \mathfrak{F}^+\varphi = 0,$$

où $\mathfrak{F}^+$ correspond à l'antiparticule. Nous aurons en théorie fonctionnelle

$$\mathfrak{F}u = Q(u, \nabla), \quad \mathfrak{F}^+\nu = Q^+(\nu, \nabla).$$

Si Q est convenablement choisi, à chaque solution u^+ correspondant à une énergie positive, on pourra associer une solution u^- correspondant à la même énergie et la même impulsion changées de signe (en l'absence de champ extérieur) et l'on posera $\nu = (u^-)^*$. La fonction u^- satisfait à $\mathfrak{F}u = Q(u, \nabla)$, alors ν satisfera à l'équation imaginaire conjuguée

$$\mathfrak{F}^*\nu = Q^*(\nu, \nabla),$$

donc

$$\mathfrak{F}^+ = \mathfrak{F}^*, \quad Q^+ = Q^*,$$

tandis que

$$\nu = (u^-)^*.$$

Il paraît essentiel en théorie de Dirac d'imposer cette condition : *Q doit être tel qu'il y ait des solutions à énergie positive u^+ et à énergie négative u^- .*

Ceci constitue donc une condition à laquelle Q doit satisfaire pour un corpuscule de Dirac.

On pose alors

$$\mathfrak{a}_r = \alpha_r \odot \mathbf{1}, \quad \mathfrak{b}_r = -(-1)^r \mathbf{1} \odot \alpha_r,$$

c'est-à-dire que, tous les indices variant de 1 à 4, on a

$$(\mathfrak{a}_r)_{lk,lm} = (\alpha_r)_{li} \delta_{km}, \quad (\mathfrak{b}_r)_{lk,lm} = -(-1)^r (\alpha_r)_{km} \delta_{li}$$

⁽¹⁾ L. DE BROGLIE, *Une nouvelle théorie de la lumière* (Hermann, Paris, 1940), t. 1, p. 148.

et M. Louis de Broglie ⁽¹⁾ a adopté comme équations du photon

$$(24) \quad \begin{cases} -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} a_1 + \frac{\partial}{\partial y} a_2 + \frac{\partial}{\partial z} a_3 + k \mu_0 c a_i \right) \Phi_{ik} = 0, \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} b_1 + \frac{\partial}{\partial y} b_2 + \frac{\partial}{\partial z} b_3 + k \mu_0 c b_i \right) \Phi_{ik} = 0. \end{cases}$$

Pour abréger, désignons les équations (24) du photon de M. Louis de Broglie par

$$(24') \quad \mathfrak{F}_A \Phi_{ik} = 0, \quad \mathfrak{F}_B \Phi_{ik} = 0.$$

Pour adopter des notations à la fois concises et faciles à utiliser, nous poserons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_t &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathfrak{F}_{A3} &= \vec{a} \cdot \nabla, & \mathfrak{F}_{B3} &= \vec{b} \cdot \nabla, \\ \mathfrak{F}_{Am} &= k \mu_0 c a_m, & \mathfrak{F}_{Bm} &= k \mu_0 c b_m, & k &= \frac{1}{\hbar}; \end{aligned}$$

$\vec{a}$ est l'opérateur vectoriel ayant a_1, a_2, a_3 comme composantes, de même $\vec{b}$ a pour composantes b_1, b_2, b_3 , enfin ∇ est l'opérateur vectoriel de composantes $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. On pourrait aussi bien adopter des notations relativistes dans l'espace-temps de Minkowski. Dans ce cas, il y aurait avantage à utiliser la forme de von Neumann pour les équations de Dirac. Mais pour les développements qui suivent, il est plus commode d'utiliser les notations de l'espace à trois dimensions, en sachant que les exigences d'invariance relativiste sont remplies.

Avec ces notations, on a

$$(25) \quad \mathfrak{F}_A = \mathfrak{F}_t + \mathfrak{F}_{A3} + \mathfrak{F}_{Am}, \quad \mathfrak{F}_B = \mathfrak{F}_t + \mathfrak{F}_{B3} + \mathfrak{F}_{Bm}.$$

On peut combiner les deux équations (24') en effectuant leur somme et leur différence. Les équations qu'on obtient ainsi sont

$$\mathfrak{F}_+ \Phi_{ik} = 0, \quad \mathfrak{F}_- \Phi_{ik} = 0$$

en posant

$$(26) \quad \mathfrak{F}_+ = \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_A + \mathfrak{F}_B), \quad \mathfrak{F}_- = \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B).$$

⁽¹⁾ L. de BROGLIE, *Une nouvelle théorie de la lumière* (Hermann Paris, 1940), t. I, p. 149. *Cours oral*, Faculté des Sciences, Paris 1957-1958. M. Louis de Broglie estime toujours que la méthode de fusion est la méthode adéquate pour obtenir le photon ainsi que les autres corpuscules de spin supérieur à $\frac{1}{2}$.

Par la méthode habituelle, nous poserons comme équation pour l'onde u du photon en théorie fonctionnelle

$$(27) \quad \mathfrak{L}_A u_{ik} = Q_{Aik}(u, \nabla), \quad \mathfrak{L}_B u_{ik} = Q_{Bik}(u, \nabla),$$

ou encore

$$(28) \quad \mathfrak{L}_+ u_{ik} = Q_{+,ik}(u, \nabla),$$

$$(29) \quad \mathfrak{L}_- u_{ik} = Q_{-,ik}(u, \nabla),$$

en posant

$$(30) \quad Q_+ = d \frac{1}{2} (Q_A + Q_B), \quad Q_- = d \frac{1}{2} (Q_A - Q_B).$$

Inversement, on a

$$Q_A = Q_+ + Q_-, \quad Q_B = Q_+ - Q_-.$$

L'équation de de Broglie

$$\mathfrak{L}_+ \Phi_{ik} = 0$$

peut être interprétée comme l'équation du centre de gravité des deux constituants du photon ⁽¹⁾ en Mécanique ondulatoire usuelle, tandis que l'équation

$$\mathfrak{L}_- \Phi_{ik} = 0$$

peut être considérée comme exprimant d'une façon invariante l'évanescence du mouvement des deux constituants autour du centre de gravité ⁽¹⁾, ⁽²⁾. Cette interprétation peut être conservée en théorie fonctionnelle pour les équations correspondantes (27); le terme non linéaire Q_+ est le terme correspondant au mouvement du centre de gravité tandis que Q_- traduirait une sorte d'interaction entre les deux constituants (*voir* ci-dessous). Mais pour que cette idée puisse être développée avec plus de précision, il faudrait auparavant avoir construit la théorie des systèmes de plusieurs corpuscules en théorie fonctionnelle ⁽³⁾.

Naturellement les termes Q_A et Q_B , et par suite Q_+ et Q_- , ne peuvent être quelconques; ils doivent satisfaire à des *conditions de compatibilité*, car il y a 16 fonctions u_{ik} et chaque équation (27) symbolise

⁽¹⁾ J.-L. DESTOUCHES, *C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 813; t. 202, 1936, p. 387; *J. Phys. Rad.*, série VII, t. 6, 1935, p. 329.

⁽²⁾ R. MURARD, *Sur une théorie générale des corpuscules et des systèmes de corpuscules et ses applications* (Thèse, Paris, 1948; *Ann. de Phys.*, 1948).

⁽³⁾ Sur ce sujet voir: J.-L. DESTOUCHES et F. AESCHLIMANN, *Les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle* (*Actualités Scientifiques*, n° 1277, Hermann, Paris, 1959).

16 équations numériques entre les u_{ik} , ce qui fait en tout 32 équations entre 16 fonctions.

16. Développement des termes Q. — Ici deux hypothèses peuvent être faites concernant le développement des termes Q_A , Q_B , Q_+ , Q_- :

1° Q_A et Q_B viennent directement et sans modification du terme Q de l'équation en u pour le corpuscule de Dirac par le processus de fusion ;

2° Q_A et Q_B contiennent une partie ne provenant pas de l'équation en u non linéaire pour le corpuscule de Dirac.

On ne peut pour le moment se prononcer sur l'adéquation de l'une ou de l'autre de ces hypothèses.

Dans le cas de l'hypothèse 2°, comme l'anneau fondamental complet pour le photon est formé par le produit direct des anneaux de chaque demi-photon, on a donc pour cet anneau complet une base de $16 \times 16 = 256$ éléments.

Si Q_+ et Q_- ont la forme la plus générale, on peut les développer sur cette base, ils auront chacun 256 termes et ce développement mettra en évidence la variance de chacun des termes.

$$Q_+ = \sum_{ij} \mathcal{U}_{ij}^+ \alpha_i \odot \alpha_j u, \quad Q_- = \sum_{ij} \mathcal{U}_{ij}^- \alpha_i \odot \alpha_j u$$

et il en sera de même de Q_A et Q_B . Ce seront alors ces termes qui exprimeront la solidarité existant entre les deux demi-photons.

Dans le cas de l'hypothèse 1°, Q_A et Q_B proviennent d'un corpuscule de Dirac et, par suite, ne concernent chacun qu'un demi-photon, on aura

$$Q_A^0 = Q \odot \mathbf{1}, \quad Q_B^0 = \mathbf{1} \odot Q^*.$$

Dans ce cas, Q_A et Q_B développés sur la base de l'anneau fondamental auront chacun 16 termes au plus

$$Q_A^0 = \sum_{ij} \mathcal{U}_i^A \alpha_i \odot \mathbf{1} u, \quad Q_B^0 = \sum_{ij} \mathcal{U}_i^B \mathbf{1} \odot \alpha_j u,$$

où les $\mathcal{U}$ sont exactement ceux d'un corpuscule et ceux d'un anti-corpuscule de Dirac.

A première vue, il ne paraît pas satisfaisant que le photon ou tout autre corpuscule de spin maximum 1 qui forme une unité indissoluble

soit formé de deux demi-particules sans aucun lien intrinsèque entre elles. On peut poser

$$Q_A = Q_A^0 + Q_{BA}, \quad Q_B = Q_B^0 + Q_{AB},$$

où Q_A^0 et Q_B^0 désignent les termes issus d'un corpuscule de Dirac. On peut toujours poser cette décomposition, mais il semble naturel de supposer que Q_{BA} et Q_{AB} ne sont pas nuls de façon que les deux demi-photons soient étroitement solidaires. Alors avec ces hypothèses, on a

$$Q_+ = \frac{1}{2} (Q_A^0 + Q_B^0) + \frac{1}{2} (Q_{BA} + Q_{AB}),$$

$$Q_- = \frac{1}{2} (Q_A^0 - Q_B^0) + \frac{1}{2} (Q_{BA} - Q_{AB}).$$

Dans ce cas Q_A^0 et Q_B^0 viennent strictement par le processus de fusion d'un corpuscule de Dirac isolé (ils satisfont à l'hypothèse 1°), tandis que Q_{BA} et Q_{AB} sont les termes supplémentaires traduisant l'interaction directe des deux demi-photons. Ces termes peuvent n'avoir, sur la base de l'anneau fondamental, des coefficients $\mathfrak{A}$ non nuls que pour les 16 termes $\alpha_j \odot \mathbf{1}$ et les 16 termes $\mathbf{1} \odot \alpha_j$, ils peuvent aussi avoir d'autres termes à coefficients non nuls.

La théorie fonctionnelle semble donc permettre d'expliquer la stabilité des corpuscules fondus : les termes non linéaires Q_{AB} et Q_{BA} qui apparaissent lors de la présence simultanée des deux corpuscules initiaux produisent le même effet que des termes d'interaction; ils assurent la stabilité du corpuscule fondu formé par les deux corpuscules initiaux. Sans l'intervention de ces deux termes Q_{AB} et Q_{BA} , on ne comprend pas d'où provient cette stabilité.

17. Compatibilité de l'équation de condition. — L'équation

$$(28') \quad \mathfrak{L}_+ u = Q_+(u, \nabla)$$

est une équation d'évolution contenant $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans sa partie linéaire $\mathfrak{L}_+$; au contraire,

$$(29') \quad \mathfrak{L}_- u = Q_-(u, \nabla)$$

est une équation de condition ne contenant pas $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans sa partie linéaire $\mathfrak{L}_-$.

En effet, en se reportant aux expressions (26) qui définissent $\mathfrak{F}_+$ et $\mathfrak{F}_-$ et aux expressions (25) donnant $\mathfrak{F}_A$ et $\mathfrak{F}_B$, on voit que

$$\mathfrak{F}_+ = \mathfrak{F}_t + \frac{1}{2}(\mathfrak{F}_{A3} + \mathfrak{F}_{B3} + \mathfrak{F}_{Am} + \mathfrak{F}_{Bm}),$$

$$\mathfrak{F}_- = \frac{1}{2}(\mathfrak{F}_{A3} - \mathfrak{F}_{B3} + \mathfrak{F}_{Am} - \mathfrak{F}_{Bm}).$$

On peut poser

$$\mathfrak{F}_{+3} = d \frac{1}{2}(\mathfrak{F}_{A3} + \mathfrak{F}_{B3}), \quad \mathfrak{F}_{+m} = d \frac{1}{2}(\mathfrak{F}_{Am} + \mathfrak{F}_{Bm}),$$

$$\mathfrak{F}_{-3} = d \frac{1}{2}(\mathfrak{F}_{A3} - \mathfrak{F}_{B3}), \quad \mathfrak{F}_{-m} = d \frac{1}{2}(\mathfrak{F}_{Am} - \mathfrak{F}_{Bm}).$$

Chacune des équations (28) et (29) fournit 16 équations entre les composantes de u .

Il faut que les équations (28) et (29) soient compatibles et ceci vient imposer des conditions aux termes Q : il faut d'abord qu'il y ait des solutions u de (28) qui, à un instant initial t_0 , satisfassent également à (29); ensuite que, si à un instant t_0 cette condition est remplie, à tout instant ultérieur la solution u de (28) satisfasse encore à (29). On peut aussi exiger davantage et poser que toute solution des équations (28) soit en même temps solution de (29). Par de telles conditions on restreint l'indétermination qui règne sur les termes Q .

Soit une solution u_{ik} qui à l'instant initial t_0 satisfait à l'équation de condition (29). Les u_{ik} satisferont encore à (29) à tout instant si la dérivée par rapport au temps de $\mathfrak{F}_- u - Q_-$ est constamment nulle, sinon à l'instant $t_0 + \Delta t$ la quantité $\mathfrak{F}_- u - Q_-$ nulle à t_0 aurait pris un accroissement $\Delta(\mathfrak{F}_- u - Q_-)$; cet accroissement ne sera nul que si l'on a constamment

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{F}_- u = \frac{\partial}{\partial t} Q_-(u, \nabla).$$

En prenant la dérivée de Q_- il ne faut pas oublier que Q_- est une fonctionnelle de u , c'est une expression contenant u et ses dérivées.

D'autre part, $\frac{\partial}{\partial t}$ commute avec $\mathfrak{F}_-$, d'où

$$(31) \quad \mathfrak{F}_- \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} Q_-(u, \nabla),$$

mais $\frac{\partial u}{\partial t}$ du premier membre peut être remplacé par son expression tirée de (28)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{a_j + b_j}{2} + k_1 x_0 c \frac{a_i + b_i}{2} \right) u_{ik} - Q_{+ik}(u, \nabla)$$

ou, en notation abrégée,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} = (\mathfrak{F}_{+3} + \mathfrak{F}_{+m}) u_{ik} - Q_{+,ik}.$$

Portons cette expression dans l'équation (31), puis explicitons la forme de $\mathfrak{F}$, on a

$$(31') \quad (\mathfrak{F}_{-3} + \mathfrak{F}_{-m}) [(\mathfrak{F}_{+3} + \mathfrak{F}_{+m}) u_{ik} - Q_{+,ik}] = \frac{\partial}{\partial ct} Q_-.$$

En remontant aux diverses définitions des opérateurs $\mathfrak{F}$ (p. 195 et 199) et en tenant compte des propriétés des opérateurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, on établit aisément les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{Am}^2 &= \mathfrak{F}_{Bm}^2 = k^2 u_0^2 c^2, \\ \mathfrak{F}_{Am} \mathfrak{F}_{A3} + \mathfrak{F}_{A3} \mathfrak{F}_{Am} &= 0, \quad \mathfrak{F}_{Bm} \mathfrak{F}_{B3} + \mathfrak{F}_{B3} \mathfrak{F}_{Bm} = 0, \\ \mathfrak{F}_{A3}^2 &= \mathfrak{F}_{B3}^2 = \triangle. \end{aligned}$$

De là il résulte immédiatement que

$$(32) \quad (\mathfrak{F}_{-3} + \mathfrak{F}_{-m}) (\mathfrak{F}_{+3} + \mathfrak{F}_{+m}) = 0.$$

Les termes linéaires disparaissent donc et l'équation (31) prend la forme

$$(33) \quad \mathfrak{F}_- Q_+(u, \nabla) + \frac{\partial}{\partial ct} Q_-(u, \nabla) = 0.$$

Si l'on pose que pour toute solution acceptable u de (28), l'équation (29) doit être vérifiée à tout instant (et ceci doit être posé) il faut que les termes non linéaires Q_+ et Q_- soient tels que pour toute solution acceptable u de (28), l'équation (33) soit vérifiée.

Ceci vient limiter l'arbitraire qui régnait jusqu'ici sur les Q .

On peut encore transformer cette équation en l'exprimant au moyen de $\mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{F}_B$, Q_A , Q_B , il suffit de se reporter aux définitions (26) et (30) et l'on obtient

$$(34) \quad \left(\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B + 2 \frac{\partial}{\partial ct} \right) Q_A(u, \nabla) + \left(\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B - 2 \frac{\partial}{\partial ct} \right) Q_B(u, \nabla) = 0$$

qui nous fournit une équation entre Q_A et Q_B .

Cette équation (34) peut être remplacée par l'équation obtenue en

remplaçant, dans (31), $\mathfrak{F}_-$ et Q_- par leur expression en A et B soit

$$(35) \quad (\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B) \frac{\partial}{\partial t} u = 2 \frac{\partial}{\partial t} (Q_A - Q_B).$$

Mais cette équation a l'inconvénient de contenir Q_A , Q_B et u tandis que (34) ne contient que Q_A et Q_B .

Donc si l'on pose que pour toute solution acceptable u de (28), l'équation (29) doit être vérifiée à tout instant, alors Q_A et Q_B doivent être tels que pour toute solution acceptable de (28) l'équation (34) soit vérifiée.

Si l'on pose, au contraire, que u est solution des équations

$$(27') \quad \mathfrak{F}_A u = Q_A, \quad \mathfrak{F}_B u = Q_B,$$

supposées compatibles, alors les relations (31), (33), (34) sont des conséquences des équations précédentes automatiquement satisfaites; dans ce cas, les conditions imposées à Q_A et à Q_B sont que les équations précédentes (27') admettent un ensemble convenable de solutions communes.

Pour vérifier que (31), (33), (34) sont des conséquences des équations précédentes (27'), il suffit de remplacer Q_A et Q_B par $\mathfrak{F}_A u$ et $\mathfrak{F}_B u$ et de constater qu'on obtient alors une identité; on a, en effet,

$$\left[\left(\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B + 2 \frac{\partial}{\partial ct} \right) \mathfrak{F}_A + \left(\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B - 2 \frac{\partial}{\partial ct} \right) \mathfrak{F}_B \right] u = 0.$$

Tenons compte de la relation opératorielle (32) qui nous donne

$$(\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B) (\mathfrak{F}_A + \mathfrak{F}_B) = -2 (\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B) \frac{\partial}{\partial ct},$$

ce qui permet de transformer la relation précédente en

$$\left[\frac{\partial}{\partial ct} (\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B) - (\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B) \frac{\partial}{\partial ct} \right] u = 0,$$

qui est bien une identité, car $\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B$ est indépendant du temps et commute avec la dérivation par rapport à t .

Ainsi suivant la façon dont est défini l'ensemble des fonctions u que l'on considère, la relation (34) est une condition sur les termes non linéaires Q ou, au contraire est une identité. Il en est de même pour les relations (34), (33), et (35) qui sont équivalentes à (34).

Mais il faut avoir exprimé la compatibilité des équations (27) qui n'est pas assurée par avance, et justement l'équation (34) exprime une con-

dition nécessaire que doivent remplir Q_A et Q_B pour toute solution u physiquement acceptable, d'où ce théorème :

THÉOREME 1. — *Une condition nécessaire pour que les équations fondamentales (27) du photon soient compatibles est que les termes non linéaires Q_A et Q_B figurant dans ces équations satisfassent, pour toute solution u physiquement acceptable, à la relation (34).*

On ne doit pas oublier que Q_A et Q_B sont déjà liés par

$$Q_A = Q_A^0 + Q_{BA}, \quad Q_B = Q_B^0 + Q_{AB}, \quad Q_A^0 = Q \odot \mathbf{1}, \quad Q_B^0 = \mathbf{1} \odot Q^*$$

où Q désigne le terme non linéaire d'un corpuscule de Dirac.

Ceci conduit à penser que les termes Q_{AB} et Q_{BA} ne sont pas nuls, sinon Q et, par suite, les termes Q_A et Q_B se trouveraient en grande partie déterminés par la condition (34), laquelle ne doit pas jouer un rôle aussi fort. Par contre, Q_{AB} et Q_{BA} doivent être liés par la transformation $\mathfrak{T}$ qui fait passer d'un corpuscule à l'anticorpuscule : si cette transformation $\mathfrak{T}$ est appliquée aux deux corpuscules de Dirac constituant un photon, celui-ci doit rester invariant, B étant changé en A avec échange de l'ordre des facteurs dans les produits $\odot$. On devra donc avoir

$$\mathfrak{T} Q_{BA} = Q_{AB}, \quad \mathfrak{T} Q_{AB} = Q_{BA}.$$

De cette façon, Q_{BA} et Q_{AB} jouissent d'un arbitraire suffisant. Comme dans le chapitre précédent pour les corpuscules de spin $\frac{1}{2}$, on voit ici pour les corpuscules obtenus par fusion que le développement complet de la théorie fonctionnelle des corpuscules fournirait une explication de la structure des divers types de corpuscules.

18. Autre forme des équations du photon. — On peut aussi mettre les équations du photon sous une autre forme en posant

$$\mathfrak{F}_C = {}_d \frac{1}{2} (b_4 \mathfrak{F}_A + a_4 \mathfrak{F}_B), \quad \mathfrak{F}_D = {}_d \frac{1}{2} (b_4 \mathfrak{F}_A - a_4 \mathfrak{F}_B),$$

alors

$$(36) \quad Q_C = {}_d \frac{1}{2} (b_4 Q_A + a_4 Q_B), \quad Q_D = {}_d \frac{1}{2} (b_4 Q_A - a_4 Q_B).$$

Adoptons des notations semblables pour les différents termes de $\mathfrak{F}_C$ et $\mathfrak{F}_D$, soit

$$\mathfrak{F}_C = \mathfrak{F}_{Cl} + \mathfrak{F}_{C3} + \mathfrak{F}_{Cm}, \quad \mathfrak{F}_D = \mathfrak{F}_{Dl} + \mathfrak{F}_{D3}.$$

Il n'y a que deux termes dans $\mathfrak{F}_D$ car on a $\mathfrak{F}_{Dm} = 0$ en vertu de la définition de $\mathfrak{F}_D$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{Cl} &= {}_d \frac{1}{2} (b_i + a_i) \mathfrak{F}_i, & \mathfrak{F}_{Dt} &= {}_d \frac{1}{2} (b_i - a_i) \mathfrak{F}_i = -\frac{1}{2} (b_i - a_i) \frac{\partial}{\partial ct} = \frac{1}{2} (a_i - b_i) \frac{\partial}{\partial ct}, \\ \mathfrak{F}_{C3} &= {}_d \frac{1}{2} (b_i \mathfrak{F}_{A3} + a_i \mathfrak{F}_{B3}), & \mathfrak{F}_{D3} &= {}_d \frac{1}{2} (b_i \mathfrak{F}_{A3} - a_i \mathfrak{F}_{B3}), \\ \mathfrak{F}_{Cm} &= {}_d \frac{1}{2} (b_i \mathfrak{F}_{Am} + a_i \mathfrak{F}_{Bm}) = k \mu_0 c a_i b_i, & \mathfrak{F}_{Dm} &= 0.\end{aligned}$$

Les équations du photon sont alors sous cette forme

$$(37) \quad \mathfrak{F}_C u = Q_C(u, \nabla),$$

$$(38) \quad \mathfrak{F}_D u = Q_D(u, \nabla);$$

dans cette combinaison, on a séparé les 32 équations du photon en 16 équations contenant la masse μ_0 et 16 équations ne contenant pas μ_0 .

On peut alors poser la condition que les équations (37) suffisent à fixer l'évolution de la fonction u .

Appliquons l'opérateur $\mathfrak{F}_{Dt}$ à l'équation (37), il vient

$$(39) \quad \mathfrak{F}_{Dt} \mathfrak{F}_C u = \mathfrak{F}_{Dt} Q_C,$$

transformons le premier membre, nous avons

$$\mathfrak{F}_{Dt} \mathfrak{F}_C = \mathfrak{F}_{Dt} [\mathfrak{F}_{Cl} + \mathfrak{F}_{C3} + \mathfrak{F}_{Cm}].$$

En tenant compte des définitions de $\mathfrak{F}_{Dt}$ et $\mathfrak{F}_{Cl}$ ainsi que des propriétés de a_i et b_i , on a

$$\mathfrak{F}_{Dt} \mathfrak{F}_{Cl} = 0.$$

En se reportant aux définitions de $\mathfrak{F}_{Dt}$, $\mathfrak{F}_{C3}$, $\mathfrak{F}_{D3}$, $\mathfrak{F}_{Cl}$ et en tenant compte des propriétés des a_i et b_i , on établit que

$$\mathfrak{F}_{Dt} \mathfrak{F}_{C3} = \mathfrak{F}_{D3} \mathfrak{F}_{Cl}.$$

Ensuite on vérifie que $\mathfrak{F}_{Dt}$ et $\mathfrak{F}_{Cm}$ commutent et que l'on a

$$\mathfrak{F}_{Dt} \mathfrak{F}_{Cm} = \mathfrak{F}_{Cm} \mathfrak{F}_{Dt} = -k \mu_0 c \mathfrak{F}_{D3},$$

d'où l'égalité

$$(40) \quad \mathfrak{F}_{Dt} \mathfrak{F}_C = \mathfrak{F}_{D3} \mathfrak{F}_{Cl} + \mathfrak{F}_{Cm} \mathfrak{F}_{Dt}.$$

Tirons $\mathfrak{F}_{Cl} u$ de l'équation (37)

$$- \mathfrak{F}_{Cl} u = (\mathfrak{F}_{C3} + \mathfrak{F}_{Cm}) u - Q_C.$$

Portons cette valeur dans (40), il vient

$$(41) \quad \mathfrak{F}_{Dt} \mathfrak{F}_C u = -\mathfrak{F}_{D3} [(\mathfrak{F}_{C3} + \mathfrak{F}_{Cm}) u - Q_C] + \mathfrak{F}_{Cm} \mathfrak{F}_{Dt} u.$$

En se reportant aux définitions de $\mathfrak{F}_{D3}$ et $\mathfrak{F}_{C3}$ et en tenant compte des propriétés des $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{b}_i$, on établit aisément que

$$\mathfrak{F}_{D3}\mathfrak{F}_{C3} = 0.$$

D'autre part, en se reportant aux définitions de $\mathfrak{F}_{D3}$ et $\mathfrak{F}_{Cm}$ et en tenant compte des propriétés des $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{b}_i$, on établit que $\mathfrak{F}_{D3}$ et $\mathfrak{F}_{Cm}$ anti-commutent

$$\mathfrak{F}_{D3}\mathfrak{F}_{Cm} + \mathfrak{F}_{Cm}\mathfrak{F}_{D3} = 0$$

et si l'on tient compte de ces deux identités, (41) devient

$$\mathfrak{F}_{Dl}\mathfrak{F}_C u = \mathfrak{F}_{Cm}\mathfrak{F}_{D3} u + \mathfrak{F}_{D3} Q_C + \mathfrak{F}_{Cm}\mathfrak{F}_{Dl} u$$

ou, en regroupant $\mathfrak{F}_{D3}$ et $\mathfrak{F}_{Dl}$,

$$\mathfrak{F}_{Dl}\mathfrak{F}_C u = \mathfrak{F}_{Cm}\mathfrak{F}_D u + \mathfrak{F}_{D3} Q_C.$$

Remplaçons par cette expression le premier membre de (39), nous obtenons l'équation

$$\mathfrak{F}_{Cm}\mathfrak{F}_D u + \mathfrak{F}_{D3} Q_C = \mathfrak{F}_{Dl} Q_C,$$

d'où

$$(\mathfrak{F}_{Dl} - \mathfrak{F}_{D3}) Q_C = \mathfrak{F}_{Cm}\mathfrak{F}_D u$$

ou, en explicitant,

$$\left[\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{b}_4) + \frac{1}{2} (\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_l - \mathfrak{b}_4 \mathfrak{a}_l) \frac{\partial}{\partial x_l} \right] Q_C = k\mu_0 c \mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{F}_D u.$$

Ceci fournit une relation entre Q_C et u qui est une conséquence de l'équation (37). Si l'équation (38) est satisfaite pour toute solution physiquement acceptable de (37), alors, dans l'équation précédente on peut remplacer $\mathfrak{F}_D u$ par Q_D , ce qui fournit une relation entre Q_C et Q_D , soit

$$(\mathfrak{F}_{Dl} - \mathfrak{F}_{D3}) Q_C = k\mu_0 c \mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_4 Q_D.$$

De cette équation, nous pouvons tirer Q_D en multipliant à gauche par $\frac{\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_4}{k\mu_0 c}$, d'où

$$(42) \quad Q_D = \frac{1}{k\mu_0 c} \mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_4 (\mathfrak{F}_{Dl} - \mathfrak{F}_{D3}) Q_C.$$

A partir de cette expression de Q_D et des formules (36), on obtient, par somme ou différence ou multiplication par $\mathfrak{a}_i$ ou $\mathfrak{b}_i$, l'expression de Q_A et Q_B en fonction de Q_C :

$$(43) \quad Q_A = \left[\mathfrak{b}_4 + \frac{1}{k\mu_0 c} \mathfrak{a}_4 (\mathfrak{F}_{Dl} - \mathfrak{F}_{D3}) \right] Q_C,$$

$$(44) \quad Q_B = \left[\mathfrak{a}_4 - \frac{1}{k\mu_0 c} \mathfrak{b}_4 (\mathfrak{F}_{Dl} - \mathfrak{F}_{D3}) \right] Q_C,$$

d'où ce théorème :

THÉOREME 2. — *Si l'on pose la condition que l'équation (37) suffit à fixer l'évolution de l'onde u , c'est-à-dire que pour toute solution u physiquement acceptable, l'équation (38) est satisfaite si (37) l'est, alors le terme Q_D peut être exprimé à partir de Q_C par la relation (42). Q_A et Q_B sont alors exprimables à partir de Q_C par les relations (43) et (44).*

Imposer que l'équation (37) suffise à fixer l'évolution de l'onde u est, on le voit, une condition très forte puisqu'elle réduit de deux à un le nombre des termes indépendants non linéaires de l'onde u .

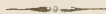
Une autre façon d'obtenir des conditions pour Q_A et Q_B est d'exprimer que les grandeurs qui sont nulles en théorie du photon ⁽¹⁾ le sont encore ici, de telle façon que, comme pour le photon linéaire de Louis de Broglie, il reste dix grandeurs maxwelliennes et six grandeurs non maxwelliennes.

Si l'on pose encore que Q_A et Q_B sont tels qu'il existe une solution d'annihilation u_0 et si l'on opère alors comme M. L. de Broglie ⁽²⁾, on obtient des équations entre grandeurs maxwelliennes d'une part et grandeurs non maxwelliennes d'autre part. Ces équations sont non linéaires et l'on obtient ainsi un électromagnétisme non linéaire lié à la théorie fonctionnelle dérivant de la théorie du photon de M. Louis de Broglie.

Mais cette fois nous quittons le domaine de la Mécanique pour celui de l'Électromagnétisme, nous sortons du cadre que nous nous sommes fixé dans ce travail; nous nous arrêterons au seuil de ce nouveau domaine.

⁽¹⁾ L. DE BROGLIE, *ibid.*, p. 156.

⁽²⁾ *Ibid.*, p. 158.



CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons examiné quelques aspects des notions de système physique et de corpuscule, en Mécanique classique puis en Mécanique ondulatoire, enfin en théorie fonctionnelle des corpuscules.

Les difficultés que soulève la notion de système apparaissent dès la Mécanique classique où nous voyons se dessiner deux tendances, une tendance ondulatoire et une tendance cosmologique, qui elle, s'affirmera dans les théories relativistes généralisées.

Après avoir précisé quelques propriétés des trièdres principaux (chap. II et début chap. III) nous avons cherché à énoncer les principes de la Mécanique sous forme d'un système de postulats évitant les principales objections faites à l'exposé usuel (résumé au chapitre I), à savoir une certaine surabondance (quelques propriétés résultent du choix du repère fondamental) et un appel à des expériences irréalisables (envois de paires de points à l'infini). Nous choisissons le repère fondamental comme repère principal pour un choix de masse tel que le principe de superposition des forces soit valable. La notion de masse s'introduit ainsi sans concept et sans envoi des points à l'infini. Les principes d'égalité de l'action et de la réaction et de l'inertie viennent ensuite compléter ce premier principe. Puis il fallait montrer l'équivalence de ces principes avec les principes usuels (1^{re} partie, chap. III).

Pour faire en Mécanique ondulatoire une étude analogue sur la notion de système, il fallait distinguer les parties qui subsistent de la Mécanique classique de l'apport proprement quantique. En tenant compte du rôle essentiel des appareils de mesure et en appliquant le calcul des prévisions, on est conduit à associer un opérateur à chaque grandeur physique et ce sont des considérations sur la persistance des structures formelles qui permettent de dégager aisément ce qui subsiste de

Mécanique classique en Mécanique ondulatoire. Nous voyons apparaître, sous la forme de relations entre opérateurs, des équations opératoriels qui constituent une dynamique opératorielle. Pour pouvoir construire cette dynamique, il fallait d'abord définir d'une façon algébrique complètement indépendante de la Mécanique ondulatoire, les dérivées partielles symboliques et la différentielle totale symbolique d'un opérateur et examiner leurs propriétés. On peut alors définir un système d'équations différentielles et en étudier les propriétés, notamment obtenir l'équation des intégrales premières. Par cette méthode on peut tout d'abord parvenir en Mécanique ondulatoire à l'équation

$$- \quad \mathbf{F} = m\Gamma$$

et développer complètement dans cette mécanique la théorie des mouvements relatifs. On peut étendre la Mécanique ondulatoire au cas de systèmes non canoniques (n'admettant pas d'opérateur hamiltonien), par exemple au cas des forces dépendant de la vitesse. On peut ainsi traiter par la Mécanique ondulatoire la théorie des expériences de Maurice de Broglie et de Millikan. L'intégration s'effectue au moyen d'intégrales premières. Cette méthode opératorielle fait apparaître clairement quel est l'apport proprement quantique à la mécanique; il peut s'exprimer par la relation de non-commutation entre variables conjuguées. Cette relation a pour conséquence de réduire les crochets de Poisson (et par suite l'équation des intégrales premières) au défaut de commutation (2^e partie, chap. III), d'où les expressions usuelles de la Mécanique ondulatoire.

Naturellement dans cette analyse, on ne porte son attention que sur l'aspect proprement mécanique alors que l'aspect ondulatoire de la Mécanique quantique (qui est aussi essentiel) est laissé dans l'ombre. Ces rapprochements des deux mécaniques conduisent à rechercher des corrélations entre propriétés des mouvements classiques et propriétés de quantification. Quelques indications dans ce sens sont données au chapitre IV (2^e partie).

En Mécanique ondulatoire, les difficultés propres à la notion de système de la Mécanique classique subsistent renforcées par l'exigence d'observabilité. Il convient alors de reprendre l'étude de la notion de système physique d'un point de vue plus général en vue de chercher une théorie meilleure que la théorie quantique usuelle. C'est à cette étude qu'est consacrée la troisième partie.

Dès la première partie, en Mécanique classique, nous avons vu qu'on introduit la notion de système physique par une coupure avec le reste

de l'univers, en supprimant les actions individuelles qui s'exercent entre éléments extérieurs et éléments du système. On peut atténuer cette coupure par la méthode du champ extérieur qui remplace par une action globale l'effet des actions individuelles sur le système. On a alors une coupure de l'univers en deux parties : une partie spécifiée, le système, une partie non spécifiée, l'extérieur, qui agit sur le système par des champs.

Il n'y a que deux façons d'augmenter la précision : soit étendre le système jusqu'à ce qu'il comprenne tout l'univers, soit le restreindre jusqu'à être insécable pour former une théorie de champ, où le champ agira sur chaque corpuscule et chaque corpuscule réagira sur le champ. Ces deux façons conduisent à des théories cosmologiques. Mais la réduction au corpuscule n'atténue pas la coupure : la partie spécifiée se réduit à un élément, les effets des autres corpuscules sont mis en collectivité dans le champ.

Pour obtenir une approximation meilleure et atténuer la coupure que constitue la distinction d'un corpuscule dans l'univers (3^e partie, chap. I) nous avons été amené à représenter un corpuscule d'une façon telle que l'extérieur puisse influencer non seulement le corpuscule par des forces au moyen du champ, mais encore en modifiant ses caractéristiques internes. Ceci nous engage alors à représenter un corpuscule au point de vue physique par une fonction, d'où le terme de « théorie fonctionnelle des corpuscules ». Mais de cette manière on se trouve tout naturellement placé dans la ligne de pensée de M. Louis de Broglie avec sa théorie non linéaire de la double solution.

Une première théorie non relativiste et sans spin peut être aisément ébauchée (3^e partie, chap. I). Mais il est nécessaire d'introduire et le spin et la relativité. Ceci fait l'objet du dernier chapitre (3^e partie, chap. IV).

Il faut donc envisager une théorie fonctionnelle du corpuscule de Dirac, et la nécessité d'introduire le spin isotopique d'une part, la méthode de fusion d'autre part obligent à étendre la théorie fonctionnelle à tout corpuscule, notamment au photon. Une théorie fonctionnelle du photon de M. Louis de Broglie impose un certain nombre de conditions aux termes non linéaires (alors que dans la théorie non relativiste ceux-ci demeureraient entièrement indéterminés). On peut espérer que peu à peu de nouvelles conditions viendront s'ajouter et détermineront les termes non linéaires. On voit alors que si le caractère fonctionnel et la non-linéarité sont introduits en un domaine limité, ils gagnent les autres domaines de la Physique et l'on peut

envisager un électromagnétisme non linéaire dérivant du photon de M. Louis de Broglie.

La notion de système physique, peu modifiée lors du passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire, se trouve au contraire profondément transformée en théorie fonctionnelle des corpuscules parce qu'on tient compte de l'influence de l'environnement sur les caractéristiques propres du système et ceci a pour conséquence l'introduction de termes non linéaires dans les équations sur les ondes physiques.

BIBLIOGRAPHIE

AESCHLIMANN (F.) :

a. *C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 179 et 552; t. 230, 1950, p. 519; t. 232, 1951, p. 695; t. 233, 1951, p. 1578.

b. *Sur la représentation géométrique des corpuscules (J. Phys. Rad.* t. 13, 1952, p. 600-604).

c. *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 354 et 1140.

d. *Sur la représentation fonctionnelle des corpuscules (J. Phys. Rad.*, t. 13, 1954, p. 752).

e. *L'électromagnétisme non linéaire et les photons (Thèse complémentaire pour le Doctorat ès Sciences, Paris, 13 juin 1957).*

f. *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 3034.

g. *Extension de la théorie fonctionnelle aux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ (J. Phys. Rad.*, t. 18, 1957, p. 523-526).

h. *Extension de la théorie fonctionnelle des corpuscules au nucléon et au photon (J. Phys. Rad.*, t. 18, 1957, p. 562-566).

i. *Sur les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle non relativiste (J. Phys. Rad.*, t. 20, 1959).

j. *Onde moyenne d'un système de corpuscules en théorie fonctionnelle (J. Phys. Rad.*, t. 20, 1959).

k. *Le barycentre en théorie fonctionnelle des systèmes de corpuscules (J. Phys. Rad.*, t. 20, 1959).

AESCHLIMANN (F.) et DESTOUCHES (J.-L.) : a. *L'électromagnétisme non linéaire et les photons en théorie fonctionnelle des corpuscules (J. Phys. Rad.*, t. 18, 1957, p. 632).

b. *Les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle (Actualités Scientifiques, n° 1277, Hermann, Paris 1959).*

BODIOU (G.), *Recherches sur les fondements du calcul quantique des probabilités dans les cas purs (espace de Hilbert, principe d'ondulisation) (Thèse Paris, 1949; Annales de Physique, 1950).*

BOURBAKI (N.), *Algèbre, livre II (Hermann, 1942; A. S. I., n° 934).*

BROGLIE (L. DE) :

a. *C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1926, p. 447.

b. *C. R. Acad. Sc.*, t. 184, 1927, p. 273.

- c. *C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1927, p. 380.
 - d. *J. Phys. Rad.*, t. 8, 1927, p. 225-241.
 - e. *Une nouvelle théorie de la lumière* (Hermann, Paris, 1940), t. I.
 - f. *Physique et Microphysique* (Albin Michel, Paris, 1947).
 - g. *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 641 et 1013.
 - h. *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 234 et 265.
 - i. *La physique quantique restera-t-elle indéterministe ?* (Gauthier-Villars, Paris, 1953, fasc. I de la Collection *Les grands problèmes des Sciences*).
 - j. *La théorie des particules à spin* (Gauthier-Villars, Paris, 1954).
 - k. *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire (La théorie de la double solution)* (Gauthier-Villars, Paris, 1956).
 - l. Cours oral (Institut Henri Poincaré, 1956-1957).
- BROGLIE (L. DE) et DESTOUCHES (J.-L.), *C. R. Acad. Sc.*, t. 201, 1935, p. 369.
- CAZIN (M.), *Recherches sur les applications du calcul vectoriel gauche à la Mécanique ondulatoire (Diplôme d'Études supérieures, Paris, 1946; Thèse de Doctorat ès sciences, Paris, 1948).*
- CHURCH (A.), *The calculus of λ -conversion* (*Ann. Math. Studies*, n° 6, Princeton, University Press, 1941).
- DESTOUCHES (J.-L.) :
- a. *J. Phys. Rad.*, 7^e série, t. 3, 1934, p. 320.
 - b. *Centre de gravité en Mécanique de Dirac*, (*C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 813).
 - c. *Théorie du centre de gravité en Mécanique ondulatoire et applications* (*J. Phys. Rad.*, 7^e série, t. 6, 1935, p. 329).
 - d. *Propriétés du spin d'un système de corpuscules* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, p. 387).
 - e. *Essai sur la forme générale des théories physiques (Thèse principale pour le Doctorat ès lettres, Paris, 1938; Publ. in Coll. Monographies Math., Univ. Cluj. Roumanie, fasc. 3, 1938).*
 - f. *Corpuscules et systèmes de corpuscules* (Gauthier-Villars, Paris, 1941).
 - g. *Principes fondamentaux de Physique théorique* (3 vol., 904 pages, Hermann, Paris, 1942).
 - h. *Sur la théorie du nucléon, le spin isotopique et les forces nucléaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 219, 1944, p. 575).
 - i. Cours oral (Faculté des Sciences, Paris, 1942 et 1944).
 - j. *Méson et théorie des forces nucléaires* (Réunions Louis de Broglie sur le Méson, *Rev. Opt.*, 1945, p. 129-165).
 - k. *Sur l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire* (Mémoire ronéographié, Paris, 1951).
 - l. *Conférence au Séminaire de Physique théorique de Turin*, mars 1952.
 - m. *Sur l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire et l'hypothèse des paramètres cachés* (*J. Phys. Rad.*, t. 13, 1952, p. 354-358).

n. *Sur une propriété limitée de l'onde moyenne en théorie fonctionnelle des systèmes de corpuscules* (*J. Phys. Rad.* t. 21, 1960).

n. *Sur l'interprétation physique des théories quantiques* (*J. Phys. Rad.*, t. 13, 1952, p. 385-391).

o. *Méthodologie, Notions géométriques*, t. I du *Traité de Physique mathématique et de Physique théorique* (Gauthier-Villars, Paris, 1953).

p. *La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules* (Gauthier-Villars, Paris, 1956).

q. *J. Phys. Rad.*, t. 17, 1956, p. 475.

FÉVRIER (P.) :

a. *La structure des théories physiques* (P. U. F., Paris, 1951).

b. *J. Phys. Rad.*, t. 14, 1953, p. 640.

c. *L'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire et des théories quantiques* (Gauthier-Villars, Paris, 1956, fasc. II de la Collection *Les grands problèmes des Sciences*).

FRÉCHET (M.), *Les espaces abstraits* (Gauthier-Villars, Paris, 1928).

GAMOW, *Z. Physik*, t. 51, 1928, p. 204.

GOUSAT (É.), *Cours d'Analyse mathématique* (Gauthier-Villars, Paris, 1942, 6^e éd.), t. II.

JANCEL (R.), *Les fondements de la Mécanique statistique quantique* (Thèse de Doctorat ès sciences, Paris, 1957).

MOREL-VIARD (J.), *Recherches sur la Mécanique ondulatoire non relativiste des systèmes* (Thèse de Doctorat ès sciences, Paris, 1948; *Collectanea mathematica Barcelona*, vol. II, 1949).

NOLL (W.) :

a. *The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics*. Communication Colloque de Berkeley, on the axiomatic method, 1958 (Nath Holland Publ. Co, Amsterdam, 1959).

b. *La Mécanique classique basée sur un axiome d'objectivité*. Communication Colloque de Paris, 1959 (Gauthier-Villars, Paris, 1960).

PAULI (W.), *Z. f. Physik*, t. 43, 1927, p. 601.

PERRIN (J.), *Les atomes* (Alcan, Paris, 1927).

PICARD (É.), *Traité d'Analyse* (Gauthier-Villars, Paris, 1926, 3^e éd.), t. II.

THARRATS (J.), *J. Phys. Rad.*, t. 13, 1952, p. 283.

VIGIER (J.-P.) :

a. *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 1010.

b. *Structure des Micro-objets dans l'interprétation causale de la théorie des quanta* (Gauthier-Villars, Paris, 1956, fasc. V de la Collection *Les grands problèmes des Sciences*).

WEIERSTRASS, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, Paris, 1879.

YUKAWA, *Phys. Rev.*, t. 77, 1950, p. 219.

L'ÉLECTROMAGNÉTISME NON LINÉAIRE ET LES PHOTONS

1. **La théorie de Mie** ⁽¹⁾. — Mie a modifié les équations de Maxwell-Lorentz dans le but d'incorporer l'électron au champ. L'électron serait constitué par une région de forte concentration du champ. On aurait ainsi une représentation plus unitaire du monde physique.

Il a distingué les vecteurs champ des vecteurs induction de Maxwell, la liaison entre champ et induction étant non linéaire. Les équations fondamentales seront donc les équations de Maxwell écrites en distinguant les champs des inductions, avec une liaison non linéaire entre champs et inductions. En unités rationalisées elles prennent la forme

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = 0,$$

$$(2) \quad \text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} - \text{rot } \vec{\mathcal{H}} = -\vec{i},$$

$$(4) \quad \text{div } \vec{\mathcal{D}} = \rho,$$

$$(5) \quad \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \text{grad } \mathcal{V},$$

$$(6) \quad \vec{\mathcal{B}} = \text{rot } \vec{\mathcal{A}},$$

$$(7) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{i} = 0.$$

Dans ces équations, $\vec{\mathcal{B}}$ désigne l'induction magnétique, $\vec{\mathcal{H}}$ le champ magnétique, $\vec{\mathcal{D}}$ l'induction électrique, $\vec{\mathcal{E}}$ le champ électrique, $\vec{i}$ le

(1) G. MIE, *Ann. Phys.*, 4^e série, Bd 37, 1912, p. 511 ; Bd 39, 1912, p. 1 ; Bd 40, 1913, p. 1.

courant électrique, ρ la densité de charge électrique, $\vec{\mathcal{A}}$ le potentiel vecteur, $\mathcal{V}$ le potentiel scalaire.

En Relativité, en posant $x_4 = ict$, on forme un *quadrivecteur courant* s_i de composantes $i_x, i_y, i_z, i\rho$ et un *quadrivecteur potentiel* φ_i de composantes, $-\mathcal{A}_x, -\mathcal{A}_y, -\mathcal{A}_z, -i\mathcal{V}$. De même, on définit deux tenseurs antisymétriques du second rang liés aux champs et aux inductions

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\beta}: \quad \mathcal{F}_{ij} &= i\mathcal{E}_j, & \mathcal{F}_{ij} &= \mathcal{B}_k \\ \mathcal{H}_{\alpha\beta}: \quad \mathcal{H}_{ij} &= i\mathcal{D}_j, & \mathcal{H}_{ij} &= \mathcal{C}_k, \\ (i, j, k, \text{ permutation paire de } 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Avec ces notations les équations fondamentales s'écrivent

$$(1'), (2') \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{kl}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathcal{F}_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathcal{F}_{ik}}{\partial x^l} = 0,$$

$$(3'), (4') \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{ik}}{\partial x^k} = s_i,$$

$$(5'), (6') \quad \mathcal{F}_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i},$$

$$(7') \quad \frac{\partial s_i}{\partial x^i} = 0.$$

Alors qu'en théorie de Lorentz on identifie les champs et les inductions en posant $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{B}}$, alors $\mathcal{F}_{ik} = \mathcal{H}_{ik}$, en théorie de Mie on conserve la distinction entre champs et inductions.

Nous allons montrer qu'à partir d'un photon obtenu par fusion, selon la méthode indiquée au chapitre précédent, nous obtenons les équations ci-dessus en posant des définitions convenables. La non-linéarité fait que ρ et $\vec{i}$ ne sont pas indépendants de $\vec{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{V}$. En théorie linéaire de Lorentz, au contraire, ρ et $\vec{i}$ ne sont pas connus en fonction de $\vec{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{V}$; c'est pourquoi il y a des termes de sources indépendants du champ électromagnétique, et c'est pourquoi il faut introduire une hypothèse supplémentaire, celle de la force de Lorentz

$$f \, d\tau = \rho \, d\tau (\vec{\mathcal{E}} + \mathbf{v} \wedge \vec{\mathcal{H}}),$$

où $d\tau$ désigne l'élément de volume. Le premier terme exprime la force électrique, le second la force de Laplace.

Mie a supprimé ces hypothèses supplémentaires en incorporant l'électron au champ, en considérant l'électron comme une concentration du champ. L'électron serait alors complètement défini à partir du champ. Mais Mie n'a pas pleinement abouti dans sa tentative.

2. La théorie de Born. — Born s'est fixé un objectif plus limité que celui de Mie : éviter que pour une charge ponctuelle les champs ne soient infinis comme dans la théorie de Lorentz. Born part d'une fonction lagrangienne et d'un principe de stationnarité. Au lieu d'adopter la fonction lagrangienne $\mathcal{L}$ classique

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}}^2 - \vec{\mathcal{E}}^2),$$

il la modifie par un procédé formel qui a un effet analogue à celui du passage de la fonction de Lagrange de la Mécanique classique à celle de la Mécanique relativiste, c'est-à-dire qu'il pose

$$\mathcal{L} = b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{\vec{\mathcal{B}}^2 - \vec{\mathcal{E}}^2}{b^2}} - 1 \right),$$

si $|\vec{\mathcal{B}}|^2 \ll b^2$ et $|\vec{\mathcal{E}}|^2 \ll b^2$, on a

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}}^2 - \vec{\mathcal{E}}^2);$$

ceci se raccorde bien au cas classique qu'on retrouve comme un cas limite.

Il pose d'ailleurs cette fonction $\mathcal{L}$ comme un exemple de fonction de Lagrange pour un électromagnétisme non linéaire sans appuyer ce choix par des raisons physiques. Comme il distingue entre champs et inductions, son formalisme lagrangien a pour conséquence les équations (1) à (7) écrites plus haut. En somme, les équations fondamentales de la théorie de Born sont les équations (1) à (7) de Mie avec les relations particulières entre les champs et les inductions dues à la forme particulière de la fonction lagrangienne.

Naturellement, à partir de la théorie non linéaire du photon du chapitre précédent, nous ne retrouvons pas les relations qui dérivent de la forme particulière du lagrangien de Born (notamment la liaison entre champs et inductions) puisque, partant de termes non linéaires Q_A et Q_B dont la forme est indéterminée, nous obtiendrons une liaison indéterminée entre les champs et les inductions. Par contre si nous admettons en plus une forme déterminée pour la fonction lagrangienne, par exemple la forme de Born, nous obtiendrons une liaison déterminée entre champ et induction.

3. Le tenseur de polarisation. — Il est commode de poser avec Heisenberg et Born,

$$(8) \quad \vec{\mathcal{M}} = {}_d \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{E}},$$

$$(9) \quad \vec{\mathcal{P}} = {}_d \vec{\mathcal{D}} - \vec{\mathcal{E}},$$

$$(10) \quad \vec{j} = {}_d \text{rot} \vec{\mathcal{M}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t},$$

$$(11) \quad \sigma = {}_d - \text{div} \vec{\mathcal{P}}$$

et en notation quadridimensionnelle (indices k, l variant de 1 à 4, avec $x_4 = ict$)

$$(8'), (9') \quad \mathcal{M}_{kl} = {}_d \mathcal{F}_{kl} - \mathcal{E}_{kl},$$

$$(10'), (11') \quad \sigma_k = {}_d \frac{\partial \mathcal{M}_{lk}}{\partial x^l},$$

alors i, j, k étant ici une permutation paire de 1, 2, 3, on a

$$\mathcal{M}_{ij} = \mathcal{M}_k, \quad \mathcal{M}_{ij} = -i\mathcal{P}_j, \quad \sigma_i = -j_i, \quad \sigma_4 = -i\sigma,$$

$\vec{\mathcal{M}}$ est la densité de moment magnétique et $\vec{\mathcal{P}}$ la densité de moment électrique. S'il n'y a pas de charges présentes, $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\mathcal{P}}$ sont les polarisations du vide, $\vec{j}$ et σ sont la densité du courant et la densité de la charge liées à la polarisation.

A la fin de son Cours à l'Institut Henri Poincaré en 1937, Born ⁽¹⁾ considère sa théorie comme une *superstructure* de la théorie classique de Maxwell, tandis qu'il considère les théories du photon de MM. Louis de Broglie, Jordan, Kronig comme une *infrastructure* de la théorie classique, réduisant les lois de Maxwell à un ensemble plus simple d'équations.

En 1937, il écrivait : « Nous ne pouvons deviner à l'heure actuelle laquelle de ces conceptions sortira victorieuse du débat, et nous ne pouvons pas savoir si finalement elles ne vont pas se confondre en une seule qui les embrassera toutes les deux ». Ceci nous conduit à rapprocher la théorie du photon de M. Louis de Broglie esquissée dans le chapitre précédent, des théories non linéaires de l'électromagnétisme de Mie et de Born. Commençons par rappeler quelques formules de la théorie du photon de M. Louis de Broglie.

(1) *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 7, 1937, fasc. IV, p. 261.

4. **La théorie du photon de Louis de Broglie.** — M. Louis de Broglie ⁽¹⁾ a construit une mécanique ondulatoire du photon en se servant de la méthode de fusion de deux corpuscules de Dirac. Si l'on désigne par $\mathfrak{a}_j$ et $\mathfrak{b}_j$ les opérateurs fondamentaux des deux demi-photon, les opérateurs associés aux grandeurs électromagnétiques sont définis à partir des $\mathfrak{a}_j$ et $\mathfrak{b}_j$ par des expressions symétriques; par exemple pour les potentiels, M. Louis de Broglie a posé

$$\vec{\mathfrak{A}} =_d -K \frac{\vec{\mathfrak{a}} + \vec{\mathfrak{b}}}{2}, \quad \mathfrak{V} =_d K \frac{1+1}{2} = K1.$$

où K est une certaine constante. Il a montré qu'il convenait de poser

$$K = \frac{h}{4\pi\sqrt{\mu_0}}.$$

A partir de ces opérateurs on définit les grandeurs électromagnétiques par des expressions de la forme

$$\vec{\mathfrak{A}} =_d \sum_{ik} \Phi_{ik}^0 \vec{\mathfrak{A}} \Phi_{ik},$$

où les indices ik varient de 1 à 4, et où Φ_{ik} est la fonction d'ondes du photon, Φ_{ik}^0 la fonction d'ondes d'annihilation; M. Louis de Broglie a posé ⁽¹⁾

$$\Phi_{ik}^0 = \delta_{ik}.$$

Des équations d'ondes du photon résultent, avec ces définitions des grandeurs électromagnétiques, les équations de Maxwell pour le vide.

On remarquera que les grandeurs électromagnétiques ainsi définies sont complexes et correspondent à un photon. Ce sont des grandeurs microscopiques. A partir d'une telle grandeur $\mathcal{F}$ on formera une grandeur réelle en posant

$$\mathcal{F}_R = \mathcal{F} + \mathcal{F}^* = 2\Re \mathcal{F},$$

où $*$ désigne la quantité imaginaire conjuguée.

Les grandeurs macroscopiques s'obtiendront par un processus de moyenne à partir des grandeurs microscopiques, on aura donc

$$\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_R.$$

⁽¹⁾ L. DE BROGLIE, *Une nouvelle théorie de la lumière* (Hermann, Paris, 1940), p. 146-153 et suiv.

Les grandeurs $\mathcal{F}$ satisfont aux équations de Maxwell; il en est de même des grandeurs $\mathcal{F}^*$ puisque i ne figure pas dans ces équations, donc $\mathcal{F}_R$ satisfait à ces équations. L'opération de moyenne étant linéaire, $\mathcal{F}_M$ satisfait donc encore aux équations de Maxwell. Ainsi on retrouve bien l'électromagnétisme classique et l'on a une description microphysique en accord avec la Mécanique ondulatoire et les conceptions quantiques. Mais sous cette forme on ne voit aucun rapprochement avec la théorie de Mie ou celle de Born, car la théorie du photon de M. Louis de Broglie, comme toute théorie quantique, est essentiellement linéaire.

5. Théorie non linéaire du photon. - Au chapitre précédent nous avons exposé la théorie des ondes physiques u pour le photon; les équations fondamentales sont

$$(12) \quad \mathfrak{F}_A u = Q_A(u, \nabla), \quad \mathfrak{F}_B u = Q_B(u, \nabla),$$

Q_A et Q_B désignant les termes non linéaires, les équations du photon de M. Louis de Broglie étant

$$\mathfrak{F}_A \Phi_{ik} = 0, \quad \mathfrak{F}_B \Phi_{ik} = 0.$$

Certaines combinaisons linéaires des équations (12) nous donneront des équations électromagnétiques et celles-ci seront non linéaires par suite de la présence des termes non linéaires Q_A et Q_B . Ceci fournira une base pour l'unification de la théorie des photons avec l'électromagnétisme non linéaire.

Nous pouvons transposer au cas non linéaire la méthode de M. Louis de Broglie en lui faisant subir les modifications nécessaires.

Pour abréger nous définirons un opérateur linéaire Ω par la condition suivante : si $\mathfrak{F}$ est un opérateur et u la fonction d'onde physique d'un photon, nous poserons

$$\Omega \mathfrak{F} u = d \sum_{ik} K \delta_{ik} \mathfrak{F} u_{ik},$$

où K est la constante de M. Louis de Broglie introduite au paragraphe précédent. Nous poserons aussi

$$\Omega_0 = d \frac{1}{K} \Omega.$$

Les quantités $\Phi_{ik}^0 \mathfrak{F} \Phi_{ik}$ de M. Louis de Broglie apparaissent comme des éléments de matrice de transition et la quantité $\Phi_{ik}^0 = \delta_{ik}$ est considérée comme une fonction d'onde du photon correspondant à l'état

d'annihilation. Avec les ondes physiques u , une telle interprétation ne peut plus être donnée et l'opérateur Ω a pour effet de définir certaines combinaisons linéaires des fonctions d'ondes u_{ik} .

En somme, à une onde physique u de composantes u_{ik} d'un photon nous associons certaines fonctions linéaires des u_{ik} comme grandeurs électromagnétiques élémentaires (liées à un photon).

Considérons les équations fondamentales (12). Si α_j et $\mathbf{b}_j$ sont les opérateurs déduits des α de Dirac par fusion, en multipliant à gauche par de tels opérateurs les équations (12), on obtiendra des combinaisons linéaires de ces équations, soit

$$\alpha_j \mathfrak{F}_A u = \alpha_j Q_A, \quad \mathbf{b}_j \mathfrak{F}_B u = \mathbf{b}_j Q_B.$$

A ces équations nous pouvons appliquer l'opérateur Ω et nous obtenons des équations conséquences des équations (12)

$$\Omega \alpha_j \mathfrak{F}_A u = \Omega \alpha_j Q_A, \quad \Omega \mathbf{b}_j \mathfrak{F}_B u = \Omega \mathbf{b}_j Q_B.$$

Nous pouvons prendre aussi des demi-sommes et des demi-différences de ces équations, soit

$$\frac{1}{2} \Omega (\alpha_j \mathfrak{F}_A \pm \mathbf{b}_j \mathfrak{F}_B) u = \frac{1}{2} \Omega (\alpha_j Q_A \pm \mathbf{b}_j Q_B),$$

le même signe $+$ ou $-$ étant pris dans les deux membres.

Les combinaisons avec le signe $+$ donnent les relations maxwelliennes, et correspondent à l'état spin 1, tandis que les combinaisons avec le signe $-$ donnent les relations non maxwelliennes qui correspondent à l'état spin 0; on traiterait ces dernières sans difficultés d'une façon semblable aux relations maxwelliennes (1).

Les opérateurs $\mathfrak{F}_A$ et $\mathfrak{F}_B$ sont constitués par une somme de trois termes : terme de temps en ∂_t , terme d'espace, terme de masse; selon les notations adoptées au chapitre précédent, nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_A &= {}_d \mathfrak{F}_t + \mathfrak{F}_{A3} + \mathfrak{F}_{Am}, & \mathfrak{F}_B &= {}_d \mathfrak{F}_t + \mathfrak{F}_{B3} + \mathfrak{F}_{Bm}, \\ \mathfrak{F}_t &= {}_d - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, & \mathfrak{F}_{A3} &= {}_d \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{a}}, & \mathfrak{F}_{B3} &= {}_d \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{b}}, \\ \mathfrak{F}_{Am} &= {}_d k \mu_0 c \mathbf{a}_4, & \mathfrak{F}_{Bm} &= {}_d k \mu_0 c \mathbf{b}_4, & k &= {}_d \frac{2\pi}{h} = \frac{1}{\hbar}. \end{aligned}$$

6. Les identités de M. Louis de Broglie. — M. Louis de Broglie (2)

(1) Voir J.-L. DESTOUCHES, *Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle* (Gauthier-Villars, Paris, 1958), chap. VI, § 18, p. 94.

(2) *Une nouvelle théorie de la lumière*, p. 154.

a obtenu dans sa théorie du photon six identités qui résultent de la forme des opérateurs $\mathbf{a}_j$ et $\mathbf{b}_j$. Comme ces identités sont indépendantes du fait que les fonctions Φ_{ik} obéissent ou non à des équations d'ondes, elles seront encore valables ici.

$\mathbf{a}_j$ et $\mathbf{b}_j$ désignant des opérateurs fondamentaux du photon, posons

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1^A &= {}_d i \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3, & \mathfrak{s}_2^A &= {}_d i \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1, & \mathfrak{s}_3^A &= {}_d i \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2, \\ \mathfrak{s}_1^B &= {}_d i \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3, & \mathfrak{s}_2^B &= {}_d i \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1, & \mathfrak{s}_3^B &= {}_d i \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2, \\ \mathfrak{s}_4^A &= {}_d i \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3, & \mathfrak{s}_4^B &= i \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Les six identités de M. Louis de Broglie sont

$$\begin{aligned} \Omega(\overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}}^A + \overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}}^B) u_{ik} &= 0, & \Omega(\mathfrak{s}_4^A + \mathfrak{s}_4^B) u_{ik} &= 0, \\ \Omega(\mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_4) u_{ik} &= 0, & \Omega(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_4) u_{ik} &= 0. \end{aligned}$$

7. **Obtention des équations microscopiques de l'électromagnétisme non linéaire.** — Partons des équations fondamentales (12) et multiplions-les respectivement par $\mathbf{a}_i$ et par $\mathbf{b}_i$. Nous avons (en sommant sur les indices répétés)

$$\mathbf{a}_1 \mathfrak{F}_{A3} = \mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_j \partial_j) = \partial_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \partial_2 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \partial_3$$

et une expression semblable pour $\mathbf{b}_1 \mathfrak{F}_{B3}$. Alors

$$\mathbf{a}_1 \mathfrak{F}_{A3} + \mathbf{b}_1 \mathfrak{F}_{B3} = 2 \partial_1 + \frac{1}{i} (\mathfrak{s}_3^A + \mathfrak{s}_3^B) \partial_2 - \frac{1}{i} (\mathfrak{s}_2^A + \mathfrak{s}_2^B) \partial_3,$$

alors, en vertu de la première identité de M. Louis de Broglie, on a

$$\Omega(\mathbf{a}_1 \mathfrak{F}_{A3} + \mathbf{b}_1 \mathfrak{F}_{B3}) = 2 \Omega \partial_1,$$

ensuite

$$\mathbf{a}_1 \mathfrak{F}_{Am} + \mathbf{b}_1 \mathfrak{F}_{Bm} = k_0 c (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_4).$$

Posons, comme dans la théorie du photon de M. Louis de Broglie,

$$\mathfrak{A}_v = {}_d K \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1}{2}, \quad \mathfrak{V} = {}_d K \mathbf{1}$$

et

$$\mathfrak{A}_v = {}_d \Omega \mathfrak{A}_v u, \quad \mathfrak{V} = {}_d \Omega_0 \mathfrak{V} u.$$

De la définition de Ω , on a

$$\partial_\alpha \Omega \mathfrak{F} u = \partial_\alpha \sum_{ik} K \delta_{ik} \mathfrak{F} u_{ik} = \sum_{ik} K \delta_{ik} \partial_\alpha \mathfrak{F} u_{ik} = \Omega \partial_\alpha \mathfrak{F} u,$$

d'où la relation

$$\partial_\alpha \Omega = \Omega \partial_\alpha.$$

De cette relation, il résulte que

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial t} = \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{A}_x \frac{\partial}{\partial t} u = \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{A}_x \mathbf{f}_t u,$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial x} u = \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{V} \partial_1 u.$$

Appliquons alors les opérateurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{b}_1$ aux équations fondamentales (12), puis l'opérateur $\mathbf{\Omega}$ à la demi-somme des équations obtenues. En vertu des définitions et des propriétés précédentes, on obtient l'équation

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{1}{2} k \mu_0 c (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1) u = Q_{E,x}$$

à condition de poser

$$Q_{E,x} = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} (\mathbf{a}_1 Q_A + \mathbf{b}_1 Q_B).$$

Si nous multiplions les équations (12) par $\mathbf{a}_2$ ou $\mathbf{a}_3$, nous obtiendrons des équations de même forme en y et z . Posons

$$\vec{Q}_E = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} (\vec{\mathbf{a}} Q_A + \vec{\mathbf{b}} Q_B),$$

nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \text{grad } \mathcal{V} + \frac{1}{2} k \mu_0 c \mathbf{\Omega} (\vec{\mathbf{a}} \mathbf{a}_1 + \vec{\mathbf{b}} \mathbf{b}_1) u = \vec{Q}_E.$$

L'équation (5) de l'électromagnétisme peut être prise comme définition du champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$; nous poserons donc

$$(5'') \quad \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \text{grad } \mathcal{V},$$

il reste alors l'équation

$$\vec{\mathcal{E}} + \vec{Q}_E = \frac{1}{2} k \mu_0 c \mathbf{\Omega} (\vec{\mathbf{a}} \mathbf{a}_1 + \vec{\mathbf{b}} \mathbf{b}_1) u.$$

Si les termes non linéaires $\vec{Q}_E$ étaient nuls, nous obtiendrions pour cette équation la seconde définition de $\vec{\mathcal{E}}$ de M. Louis de Broglie ⁽¹⁾. Mais $\vec{Q}_E$ est non nul et il traduit l'influence de l'extérieur sur les caractéristiques internes du système ⁽²⁾; ici le système est un photon isolé,

(1) *Ibid.*, p. 155.

(2) Comme cela a été exposé au chapitre I.

l'extérieur est le vide. Le terme $\vec{Q}_E$ est donc la polarisation du vide. Le second membre doit alors être défini comme l'induction électrique $\vec{Q}$, qui pour $\vec{Q}_E = 0$ se réduit bien à $\vec{S}$. La seconde définition de M. Louis de Broglie du champ électrique est ici celle de l'induction électrique. On est donc conduit à poser

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= \vec{Q}_F = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} (\vec{a} Q_A + \vec{b} Q_B), \\ \vec{Q} &= \frac{1}{2} k \mu_0 c \mathbf{\Omega} (\vec{a} a_i + \vec{b} b_i) u.\end{aligned}$$

Ainsi l'équation obtenue est l'équation (9) de l'électromagnétisme non linéaire

$$(9) \quad \vec{S} - \vec{Q} = \vec{D},$$

d'où :

THÉORÈME 1. — *Si l'on multiplie par a_j et b_j pour $j = 1, 2, 3$ les équations fondamentales du photon (12) et si l'on applique à leur demi-somme l'opérateur $\mathbf{\Omega}$, on obtient les équations (5) et (9) de l'électromagnétisme non linéaire.*

8. Champ et induction magnétique. — De même que nous avons multiplié par a_1 ou a_2 ou a_3 et b_1 ou b_2 ou b_3 les équations (12) pour obtenir l'équation (9) de l'électromagnétisme, nous allons successivement multiplier les mêmes équations (12) par les autres opérateurs fondamentaux du photon. Multiplions maintenant par $a_2 a_3$ et $b_2 b_3$ les équations (12) en tenant compte des propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}a_2 a_3 \mathbf{f}_{A3} &= a_2 a_3 (a_j \partial_j) = a_1 a_2 a_3 \partial_1 - a_3 \partial_2 + a_2 \partial_3, \\ b_2 b_3 \mathbf{f}_{B3} &= b_1 b_2 b_3 \partial_1 - b_3 \partial_2 + b_2 \partial_3,\end{aligned}$$

d'où

$$(a_2 a_3 \mathbf{f}_{A3} + b_2 b_3 \mathbf{f}_{B3}) = \frac{1}{i} (s_1^A + s_1^B) \partial_1 - (a_3 + b_3) \partial_2 + (a_2 + b_2) \partial_3;$$

d'autre part,

$$(a_2 a_1 + b_2 b_1) \mathbf{f}_1 = \frac{1}{i} (s_1^A - s_1^B) \mathbf{f}_1,$$

$$a_2 a_3 \mathbf{f}_{Am} + b_2 b_3 \mathbf{f}_{Bm} = k \mu_0 c (a_2 a_3 a_i + b_2 b_3 b_i).$$

Appliquons l'opérateur $\frac{1}{2} \mathbf{\Omega}$, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \mathbf{\Omega} (a_2 a_3 \mathbf{f}_A + b_2 b_3 \mathbf{f}_B) u = - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} + \frac{k \mu_0 c}{2 i} \mathbf{\Omega} (s_1^A a_1 + s_1^B b_1) u.$$

En multipliant par $\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1$ et $\mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1$ ou $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ et $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2$ on obtiendrait un résultat semblable, d'où la formule vectorielle

$$\frac{1}{2i} \mathbf{\Omega} \left(\overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^A} \mathfrak{F}_A + \overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^B} \mathfrak{F}_B \right) u = \text{rot} \mathfrak{A} + \frac{k \mu_0 c}{2i} \mathbf{\Omega} \left(\overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^A} \mathbf{a}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^B} \mathbf{b}_1 \right) u.$$

Posons alors

$$\mathbf{Q}_b = \frac{1}{2i} \mathbf{\Omega} \left(\overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^A} \mathbf{Q}_A + \overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^B} \mathbf{Q}_B \right).$$

Définissons l'induction magnétique par l'équation (6), soit

$$(6'') \quad \vec{\mathcal{B}} =_d \text{rot} \vec{\mathcal{A}}.$$

A partir des équations (12) en les transformant comme indiqué ci-dessus, nous obtenons

$$\vec{\mathcal{B}} + \frac{k \mu_0 c}{2i} \mathbf{\Omega} \left(\overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^A} \mathbf{a}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^B} \mathbf{b}_1 \right) u = \mathbf{Q}_b.$$

Le second terme du premier membre de cette équation est justement au signe près l'expression que M. Louis de Broglie ⁽¹⁾ a prise comme définition du champ magnétique.

Il convient de conserver cette définition, soit

$$\vec{\mathcal{B}} =_d \frac{k \mu_0 c}{2i} \mathbf{\Omega} \left(\overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^A} \mathbf{a}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathfrak{s}^B} \mathbf{b}_1 \right) u.$$

Alors en se reportant à l'équation (8) de l'électromagnétisme non linéaire, on voit que l'on a

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathbf{Q}}_b,$$

$\vec{\mathbf{Q}}_b$ est donc la polarisation magnétique du vide. Nous prendrons la relation précédente comme définition de $\vec{\mathcal{M}}$, alors l'équation déduite des équations fondamentales (12) n'est autre que l'équation (8), soit

$$(8'') \quad \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{M}} + \vec{\mathcal{E}},$$

d'où :

THÉORÈME 2. — *Si l'on multiplie par $\mathbf{a}_j$ et $\mathbf{b}_j$ pour $j = 2, 3, 1$ les équations fondamentales du photon (12) et si l'on applique à leur demi-somme l'opérateur $\mathbf{\Omega}$, on obtient les équations (6) et (8) de l'électromagnétisme non linéaire.*

(1) *Ibid.*, p. 155.

Ainsi nous avons obtenu les équations (5), (6), (8), (9) de l'électromagnétisme non linéaire à partir de la multiplication des équations (12) par les opérateurs $\mathbf{a}_j$ et $\mathbf{b}_j$ pour $j = 1, 2, 3, 12, 23, 31$.

9. Équation d'évolution de l'induction électrique. — Multiplions maintenant les équations fondamentales (12) par $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4$ et $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_4$.

On a, compte tenu des définitions posées plus haut,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathfrak{F}_{A3} + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_4 \mathfrak{F}_{B3} &= -(\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) \partial_1 - \frac{1}{\ell} (\mathfrak{s}_3^A \mathbf{a}_3 + \mathfrak{s}_3^B \mathbf{b}_3) \partial_2 + \frac{1}{\ell} (\mathfrak{s}_2^A \mathbf{a}_3 + \mathfrak{s}_2^B \mathbf{b}_3) \partial_3 \\ &= -(\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) \partial_1 + \frac{2}{K k \mu_0 c} [\mathfrak{H}_3 \partial_2 - \mathfrak{H}_2 \partial_3], \\ (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_4) \mathfrak{F}_t &= \frac{2}{K k \mu_0 c} \mathfrak{D}_1, \\ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathfrak{F}_{Am} + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_4 \mathfrak{F}_{Bm} &= -\frac{2 k \mu_0 c}{k} \mathfrak{A}_x, \end{aligned}$$

d'où, en appliquant l'opérateur $\mathfrak{Q}_0$,

$$\frac{1}{2} K k \mu_0 c \mathfrak{Q}_0 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathfrak{F}_A + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_4 \mathfrak{F}_B) u = \mathfrak{Q}_0 \left[\mathfrak{D}_1 \mathfrak{F}_t - (\text{rot } \vec{\mathfrak{H}})_t - k^2 \mu_0^2 c^2 \mathfrak{Q}_0 \mathfrak{A}_x \right] u.$$

$$\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{F}_t u = \mathfrak{Q}_0 \mathfrak{F}_t \mathfrak{D}_1 u = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{Q}_x}{\partial t},$$

$$\mathfrak{Q}_0 [\mathfrak{H}_3 \partial_2 - \mathfrak{H}_2 \partial_3] u = \mathfrak{Q}_0 [\text{rot } \vec{\mathfrak{H}}]_x u = (\text{rot } \mathfrak{H})_x.$$

Posons

$$Q_{0,x} = \frac{1}{2} K k \mu_0 c (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 Q_A + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_4 Q_B).$$

Nous obtenons alors comme équation dérivée de (12)

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{Q}_x}{\partial t} + (\text{rot } \mathfrak{H})_x - k^2 \mu_0^2 c^2 \mathfrak{A}_x = Q_{0,x}.$$

En multipliant par $\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_4$ et $\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_4$ ou $\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4$ et $\mathbf{b}_3 \mathbf{b}_4$ les équations fondamentales (12) on obtiendra des équations analogues. d'où finalement l'équation vectorielle (3) de l'électromagnétisme non linéaire

$$(3'') \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{Q}}}{\partial t} = \text{rot } \vec{\mathfrak{H}} - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathfrak{A}} - \vec{i}$$

à condition de poser

$$\vec{i} = {}_d Q_D,$$

$\vec{Q}_0$ apparaît ainsi comme le terme de courant produit par la présence des termes non linéaires, d'où ce théorème :

THÉOREME 3. — *Si l'on multiplie par a_j et b_j pour $j = 14, 24, 34$ les équations fondamentales du photon (12) et si l'on applique à leur demi-somme l'opérateur Ω , on obtient les équations (3) de l'électromagnétisme non linéaire.*

De l'équation (3) on tire une équation pour l'évolution du champ électrique

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \text{rot } \vec{\mathcal{C}} - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{A}} - \vec{i} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{X}}}{\partial t}$$

ou encore

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \text{rot } \vec{\mathcal{B}} - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{A}} - \vec{i} - \vec{j},$$

en posant

$$(10'') \quad \vec{j} = {}_d \text{rot } \vec{\mathcal{H}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{X}}}{\partial t}.$$

10. Équation en divergence de l'induction électrique. — Multiplions les équations (12) par a_i et b_i ; prenons leur demi-somme et appliquons l'opérateur Ω . On a

$$\begin{aligned} a_i \mathfrak{F}_A + b_i \mathfrak{F}_B &= (a_i + b_i) \mathfrak{F}_i + (a_i \mathfrak{F}_{A3} + b_i \mathfrak{F}_{B3}) + 2k\mu_0 c, \\ a_i \mathfrak{F}_{A3} + b_i \mathfrak{F}_{B3} &= a_i (a_i \partial_i) + b_i (b_i \partial_i) = (a_i \vec{a} + b_i \vec{b}) \nabla. \end{aligned}$$

Compte tenu d'une identité de M. Louis de Broglie, on a

$$\frac{1}{2} \Omega (a_i \mathfrak{F}_A + b_i \mathfrak{F}_B) u = \frac{1}{2} \Omega (a_i \vec{a} + b_i \vec{b}) \nabla u + k\mu_0 c \Omega u,$$

or

$$\vec{\mathfrak{H}} = {}_d \frac{1}{2} K k \mu_0 c (\vec{a} a_i + \vec{b} b_i),$$

$$\Omega u = \sum_i K u_{ii} = \Omega_0 \mathfrak{H} u = \mathfrak{V}$$

et

$$\Omega_0 \vec{\mathfrak{H}} \nabla u = \Omega_0 \nabla \vec{\mathfrak{H}} u = \text{div } \vec{\mathcal{D}},$$

d'où

$$\frac{1}{2} k \mu_0 c \Omega (a_i \mathfrak{F}_A + b_i \mathfrak{F}_B) = -\text{div } \vec{\mathcal{D}} + k^2 \mu_0^2 c^2 \mathfrak{V}.$$

Posons, d'autre part,

$$\rho = {}_d Q_\rho = {}_d - \frac{1}{2} k \mu_0 c \Omega (a_4 Q_A + b_4 Q_B).$$

Des équations (12) nous obtenons alors

$$(4'') \quad \operatorname{div} \mathcal{O} = k^2 \mu_0^2 c^2 \mathcal{V} + \rho.$$

Le terme en $\mathcal{V}$ est celui de M. Louis de Broglie, dû au fait que l'on prend une masse finie μ_0 pour le photon. Le terme ρ est la charge apparente créée par l'onde u , c'est l'autocharge.

De cette équation nous pouvons obtenir une équation en divergence pour le champ électrique en nous reportant à (9'').

Posons avec Born (1)

$$(11'') \quad \sigma = {}_d - \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}};$$

σ apparaît comme la charge due à la polarisation du vide. Nous obtenons alors

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \sigma + k^2 \mu_0^2 c^2 \mathcal{V} + \rho.$$

11. Relation entre Q_A et Q_B . — Multiplions maintenant les équations (12) par $a_1 a_2 a_3$ et $b_1 b_2 b_3$. On a

$$\begin{aligned} a_{123} \mathfrak{F}_A + b_{123} \mathfrak{F}_B &= \frac{1}{\ell} (\mathfrak{s}_4^A + \mathfrak{s}_4^B) \mathfrak{F}_t + a_{123} \mathfrak{F}_{A3} + b_{123} \mathfrak{F}_{B3} + k \mu_0 c (a_{1234} + b_{1234}), \\ a_{123} \mathfrak{F}_{A3} + b_{123} \mathfrak{F}_{B3} &= a_{123} a_i \partial_i + b_{123} b_i \partial_i \\ &= (a_{23} + b_{23}) \partial_1 - (a_{13} + b_{13}) \partial_2 + (a_{12} + b_{12}) \partial_3 \\ &= \frac{1}{\ell} [(\mathfrak{s}_1^A + \mathfrak{s}_1^B) \partial_1 + (\mathfrak{s}_2^A + \mathfrak{s}_2^B) \partial_2 + (\mathfrak{s}_3^A + \mathfrak{s}_3^B) \partial_3] = \frac{1}{\ell} (\vec{\mathfrak{s}}^A + \vec{\mathfrak{s}}^B) \nabla. \end{aligned}$$

On voit alors, d'après les identités de M. Louis de Broglie, que l'on a l'identité

$$(13) \quad \Omega (a_{123} \mathfrak{F}_A + b_{123} \mathfrak{F}_B) u = 0.$$

Il nous reste l'équation

$$(14) \quad (a_{123} Q_A + b_{123} Q_B) = 0.$$

Cette relation n'est pas une identité, mais une équation qui est une conséquence des équations fondamentales (12) : elle est automatiquement vérifiée pour toute solution u des équations (12); en effet, comme $Q_A = \mathfrak{F}_A u$ et $Q_B = \mathfrak{F}_B u$, en remplaçant Q_A et Q_B par ces valeurs

(1) BORN, *ibid.*, p. 193.

on obtient l'identité (13) de M. Louis de Broglie. On n'aura donc pas à la faire intervenir dans des considérations sur l'électromagnétisme.

12. Équations des potentiels. — Appliquons maintenant l'opérateur $\frac{1}{2} \mathbf{\Omega}$ à $\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B$, c'est-à-dire que nous multiplions par $\mathbf{1}$ les équations (12) (cas $j = 0$). On a, en tenant compte des définitions posées plus haut,

$$\frac{1}{2} \mathbf{\Omega}(\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) = \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{f}_t \mathbf{v} - \frac{1}{K} \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{2} k \mu_0 c (\mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k).$$

Posons

$$(15) \quad Q_V = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} (Q_A + Q_B),$$

alors des équations (12) nous tirons

$$(16) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = Q_V.$$

C'est la relation entre les potentiels. Nous aurons la relation habituelle entre les potentiels posée par Lorentz si nous imposons la condition supplémentaire

$$(17) \quad Q_V = 0.$$

C'est là une condition sur les termes non linéaires Q_A et Q_B qui s'explicite, en remontant à la définition (15) de Q_V , par

$$(17') \quad \sum_i (Q_{A,ii} + Q_{B,ii}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(17'') \quad \operatorname{Tr}(Q_A + Q_B) = 0.$$

Une condition de cette forme sur la trace se rencontre assez souvent. Comme aucune condition spéciale n'a été imposée aux termes Q_A et Q_B , on est libre de poser la condition (17) qui constitue une condition effective de forme invariante sur Q_A et Q_B .

13. Équation en divergence pour le champ magnétique. — Multiplions maintenant les équations par $\mathbf{a}_{1234}$ et $\mathbf{b}_{1234}$. Nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_{1234} \mathbf{f}_{A3} + \mathbf{b}_{1234} \mathbf{f}_{B3} = \\ & = -\frac{1}{2} (s_1^A \mathbf{a}_k + s_1^B \mathbf{b}_k) \partial_1 + (s_2^A \mathbf{a}_k + s_2^B \mathbf{b}_k) \partial_2 + (s_3^A \mathbf{a}_k + s_3^B \mathbf{b}_k) \partial_3 = \frac{1}{k \mu_0 c} \mathbf{g}_i \partial_i, \\ & \mathbf{a}_{1234} \mathbf{f}_{Am} + \mathbf{b}_{1234} \mathbf{f}_{Bm} = k \mu_0 c (\mathbf{a}_{123} + \mathbf{b}_{123}). \end{aligned}$$

Appliquons à u ces opérateurs et appliquons encore $\frac{1}{c} \mathbf{\Omega}$. En vertu des identités de Louis de Broglie les termes en temps et en masse disparaissent, il reste

$$k\mu_0 c \mathbf{\Omega} (a_{1231} \mathbf{f}_A + b_{1231} \mathbf{f}_B) u = \mathbf{\Omega} \mathbf{f}_j \partial_i u = \mathbf{\Omega} \partial_i \mathbf{f}_j u = \text{div } \vec{\mathcal{H}} = -\text{div } \vec{\mathcal{E}}$$

Posons

$$Q_d = d k \mu_0 c \mathbf{\Omega} [a_{1231} Q_A + b_{1231} Q_B].$$

De (12) nous obtenons alors

$$\text{div } \vec{\mathcal{H}} = Q_d.$$

Cette équation peut être transformée en équation de divergence pour $\vec{\mathcal{B}}$ en tenant compte de (8), d'où

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{M}}$$

on obtient ainsi

$$(2'') \quad \text{div } \vec{\mathcal{B}} = Q_d + \text{div } \vec{\mathcal{M}}.$$

Mais de (6'') et de l'identité

$$\text{div rot} = 0,$$

on tire

$$(2''') \quad \text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0.$$

On obtient donc la relation usuelle. Par suite le second membre de (2'') est nul, d'où

$$(18) \quad \text{div } \vec{\mathcal{M}} = -Q_d.$$

Ceci constitue une relation entre les termes Q qui revient à imposer une condition sur Q_A et Q_B , c'est-à-dire une relation entre les composantes $Q_{A,1}$ et $Q_{B,1}$ qui sont au nombre de 16, ce qui est toujours possible. On a ainsi une condition sur les termes non linéaires.

14. Équation d'évolution du champ magnétique. — Multiplions les équations fondamentales (12) par a_{121} et b_{121} . On a

$$a_{121} \mathbf{f}_{A3} + b_{121} \mathbf{f}_{B3} = (a_{21} + b_{21}) \partial_1 - (a_{11} + b_{11}) \partial_2 + (a_{1231} + b'_{1231}) \partial_3,$$

d'où, après application de $\mathbf{\Omega}$ et en tenant compte des identités de M. Louis de Broglie

$$\frac{1}{2} \mathbf{\Omega} (a_{121} \mathbf{f}_{A3} + b_{121} \mathbf{f}_{B3}) u = \frac{1}{2i} \mathbf{\Omega} (s_2^A a_1 + s_2^B b_1) \mathbf{f}_3 u + \frac{2}{k\mu_0 c} [\mathbf{\Omega}_2 \partial_1 - \mathbf{\Omega}_1 \partial_2] u.$$

Tenons compte des définitions posées plus haut, il vient

$$\frac{1}{2} k \mu_0 c \mathbf{\Omega} (\mathbf{a}_{124} \mathbf{F}_{A3} + \mathbf{b}_{124} \mathbf{F}_{B3}) u = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} + (\text{rot } \mathcal{D})_z.$$

Posons,

$$Q_{H,3} = \frac{1}{2} k \mu_0 c \mathbf{\Omega} (\mathbf{a}_{124} Q_A + \mathbf{b}_{124} Q_B),$$

alors des équations (12) nous tirons

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} + (\text{rot } \vec{\mathcal{D}})_z = Q_{H,3}.$$

On obtiendrait des relations semblables en multipliant par $\mathbf{a}_{234}$ et $\mathbf{b}_{234}$, ou par $\mathbf{a}_{344}$ et $\mathbf{b}_{344}$; on arrivera ainsi à la relation vectorielle

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{\mathcal{D}} = \vec{Q}_H.$$

On peut donner d'autres formes à cette équation, d'abord en remplaçant $\vec{\mathcal{D}}$ par son expression tirée de (9) en $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{A}}$, soit $\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{A}} - \vec{\mathcal{E}}$, ce qui donne

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = \vec{Q}_H - \text{rot } \vec{\mathcal{A}}.$$

On peut aussi en tirer une équation d'évolution pour $\vec{\mathcal{B}}$ en tenant compte de (8) soit $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{N}}$, d'où

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{\mathcal{D}} = \vec{Q}_H + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{N}}}{\partial t}.$$

Enfin on obtiendra l'équation (1) avec des termes supplémentaires en remplaçant $\vec{\mathcal{D}}$ par $\vec{\mathcal{E}}$ comme plus haut dans l'équation précédente, d'où

$$(1'') \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = \vec{Q}_H + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{N}}}{\partial t} - \text{rot } \vec{\mathcal{A}}.$$

Mais calculons $-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$ à partir de (6'') et (5''), ce qui nous donne

$$(1''') \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = 0.$$

On a donc bien l'équation usuelle (1). Par suite les termes supplémen-

taires dans (1'') sont nuls et l'on a

$$(19) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}}{\partial t} - \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = - \vec{Q}_H$$

qui exprime qu'il n'y a pas de courant magnétique. Cette relation vectorielle fournit trois relations entre les termes non linéaires Q . Avec la condition sur $\text{div } \vec{\mathcal{B}}$ cela fait en tout quatre conditions scalaires qui sont imposées aux $Q_{A,ij}$ et $Q_{B,ij}$. Il est toujours possible d'ajouter la condition supplémentaire sur les potentiels.

On ne trouve pas la relation de conservation de la charge puisque nous supposons être dans le vide, il n'y a pas de charges corpusculaires; en ce qui concerne les charges créées par l'onde u au moyen des termes non linéaires, on peut la poser aussi comme une sixième condition supplémentaire :

$$(7'') \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{i} = 0.$$

On peut donner plusieurs formes à la relation de conservation de la charge : ou bien on l'impose seulement à ρ et à $\vec{i}$, c'est-à-dire aux charges créées directement par les termes non linéaires, soit

$$\rho = {}_d Q_\rho, \quad \vec{i} = {}_d - \vec{Q}_d;$$

c'est l'équation écrite ci-dessus; ou bien on peut imposer une telle condition de conservation à la charge et au courant dus aux polarisations $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\mathcal{E}}$, soit σ défini par (11'') et $\vec{j}$ défini par (10''); ou bien encore l'imposer à la totalité des deux types de quantités

$$(7''') \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho + \sigma) + \text{div } (\vec{i} + \vec{j}) = 0.$$

Il faut aussi attendre que la théorie soit plus développée pour pouvoir fixer s'il convient de poser une de ces relations et laquelle. Il convient naturellement d'imposer la conservation de la charge pour les charges e attachées à chaque corpuscule chargé, mais on ne peut rien dire actuellement concernant les charges créées par les ondes non linéaires de photons. La condition qui semble la plus naturelle est la condition (7''') qui concerne la totalité des charges liées à l'onde u : au total l'ensemble de ces charges satisferait à la condition de conservation.

15. **Équations sous forme tensorielle.** — Comme nous l'avons indiqué au début, les équations de l'électromagnétisme peuvent être mises sous forme tensorielle relativiste. En posant $x_4 = ict$ on a deux tenseurs $\mathcal{F}_{ij}$ et $\mathcal{H}_{ij}$, avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{ij} &= i\mathcal{E}_j, & \mathcal{F}_{i\bar{j}} &= \mathcal{B}_k, \\ \mathcal{H}_{ij} &= i\mathcal{D}_j, & \mathcal{H}_{i\bar{j}} &= \mathcal{C}_k \\ (i, j, k, \text{ permutation paire de } 1, 2, 3),\end{aligned}$$

ensuite

$$\mathcal{N}_{ij} = \mathcal{F}_{ij} - \mathcal{H}_{ij},$$

alors

$$\mathcal{N}_{ij} = -i\mathcal{F}_j, \quad \mathcal{N}_{i\bar{j}} = \mathcal{N}_k.$$

En posant encore

$$Q_j = -iQ_{ii}, \quad Q_3 = Q_d,$$

on obtient avec ces notations à la place de (1''') et (2''')

$$(1^{IV}), (2^{IV}) \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{F}_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathcal{F}_{ik}}{\partial x^l} = 0.$$

De même, en posant

$$s_j = i_j, \quad s_3 = i_p, \quad \varphi_i = -\mathcal{A}_i, \quad \varphi_3 = -i\mathcal{V},$$

on obtient, à la place de (3'') et (4'')

$$(3'''), (4''') \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{ik}}{\partial x^k} + h^2 \mu_0^2 c^2 \varphi_i = s_i.$$

Les équations (5) et (6) étant prises comme des définitions, les équations usuelles pour les potentiels ont lieu

$$(5'''), (6''') \quad \mathcal{F}_{ik} = \partial_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}.$$

Les relations de définition des polarisations s'écrivent

$$(8'''), (9''') \quad \mathcal{N}^{kl} = \mathcal{F}^{kl} - \mathcal{H}^{kl}.$$

La relation sur les potentiels s'écrit

$$(16''') \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i} = Q_v.$$

Les conditions (18) et (19) sur les termes non linéaires s'écrivent

$$(18'''), (19''') \quad \frac{\partial \mathcal{N}^{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathcal{N}^{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{N}^{ki}}{\partial x^j} = -Q_i$$

et elles ont bien une forme invariante. En outre, la condition de Lorentz sur les potentiels consiste à annuler un invariant

$$Q_V = 0.$$

La condition de conservation de charge (γ'') s'écrit

$$(\gamma'') \quad \frac{ds_i}{dx^i} = 0.$$

Les équations obtenues à partir des équations du photon prennent donc bien la forme tensorielle usuelle.

De ces équations pour les champs complexes microphysiques on passe à des équations de même forme pour champs réels en posant pour toute quantité F ,

$$F_R = F + F^*.$$

On les obtient en ajoutant aux équations précédentes les équations imaginaires conjuguées. Des équations pour champs réels microscopiques on passe aux équations des champs macroscopiques dans le vide par un processus de moyenne sur un grand nombre de photons. Ainsi on retrouve l'électromagnétisme non linéaire classique à partir de la théorie du photon, c'est-à-dire les équations (1) à (11) écrites au début de ce chapitre (¹).

16. Équations de propagation. — A partir des équations (1) à (6), on obtient des équations de propagation en appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ aux deux membres d'une équation d'évolution, puis en commutant au second membre un opérateur spatial avec $\frac{\partial}{\partial t}$ et en remplaçant la quantité ainsi dérivée par son expression tirée d'une autre équation d'évolution.

Posons

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta,$$

on obtient à partir de (16) et (5''), comme il vient d'être indiqué,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} = \Delta \mathcal{V} + \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c} \frac{\partial Q_V}{\partial t},$$

d'où en utilisant ($9''$), ($11''$), ($4''$),

$$(20) \quad \square \mathcal{V} - K^2 \mu_0^2 c^2 \mathcal{V} = \sigma + \rho - \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial Q_V}{\partial t} \right\}_{(17)}.$$

(¹) J.-L. DESTOUCHES et PHAM XUÂN YÊM, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 2959; J.-L. DESTOUCHES et F. AESCHLIMANN, *Les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle* (Actualités scientifiques, n° 1277, Hermann, Paris, 1959).

Par le même procédé, on a à partir de (5'') et (16)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = \text{grad div } \vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \text{grad } Q_v,$$

mais on a

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$$

et l'on obtient ainsi en utilisant (9''), (3''), (10'')

$$(21) \quad \square \vec{\mathcal{A}} - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{A}} = \vec{j} + \vec{i} + \{ \text{grad } Q_v \}_{(17)}.$$

Pour le champ magnétique on aura à partir de (8''), (1'''), (9''), (3''), (2'')

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = -\text{rot rot } \vec{\mathcal{E}} + k^2 \mu_0^2 c^2 \text{rot } \vec{\mathcal{A}} + \text{rot } \vec{i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Q}_H}{\partial t}$$

et, en utilisant la même identité opératorielle,

$$(22) \quad \square \vec{\mathcal{E}} - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{E}} = k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{H}} - \text{grad } Q_d + \text{rot } \vec{i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Q}_H}{\partial t}.$$

Pour l'induction magnétique on trouve de même à partir de (1'''), (9''), (3''), (6'')

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{B}}}{\partial t^2} = \Delta \vec{\mathcal{B}} - \Delta \vec{\mathcal{H}} - \text{grad div} (\vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{H}}) + k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{B}} + \text{rot } \vec{i},$$

d'où en utilisant (8''), (2''), (10'')

$$(23) \quad \square \vec{\mathcal{B}} - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{B}} = \text{rot} (\vec{j} + \vec{i}).$$

Cette formule s'obtient encore à partir de (22), (8''), (10''), (18), (19), ou de (21) et (6).

D'une façon semblable, pour l'induction électrique on aura à partir de (9''), (3''), (8''), (1'''), (9''), (5'')

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{D}}}{\partial t^2} = -\text{rot rot } \vec{\mathcal{D}} + k^2 \mu_0^2 c^2 [\vec{\mathcal{E}} + \text{grad } \varphi] + \text{rot } \vec{Q}_H - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{i}}{\partial t},$$

d'où en utilisant (4''),

$$(24) \quad \square \vec{\mathcal{D}} - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{D}} = \text{rot } \vec{Q}_H - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{i}}{\partial t} - \text{grad } \varphi - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{E}}.$$

Enfin, pour le champ électrique on a à partir de (9''), (3''), (8''), (1'''), (5''), (9''), (4''), (11), ou bien de (24), (9), (10), (11), ou bien

encore de (5''), (20), (21)

$$(25) \quad \square \vec{\mathcal{E}} - k^2 \mu_0^2 c^2 \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{i} + \vec{j}) - \text{grad} (\sigma + Q_\rho).$$

Au premier membre sont les termes linéaires et au second membre les termes non linéaires. Les termes entre accolades sont ceux qui disparaissent si l'on impose la condition supplémentaire (17).

Si l'on annule les termes non linéaires on retombe sur les formules de la théorie du photon de M. Louis de Broglie. Si, au contraire, on garde les termes non linéaires et si l'on annule μ_0 on retombe, après avoir rendu réelles les quantités considérées et pris des moyennes, sur les formules de l'électromagnétisme non linéaire classique (Mie et Born). Enfin si l'on annule μ_0 et les termes non linéaires, on retombe sur les formules classiques de Maxwell.

Ainsi on a les bases d'une théorie réalisant une synthèse entre la Mécanique ondulatoire du photon de M. Louis de Broglie et l'électromagnétisme non linéaire de Mie et de Born.

Naturellement les termes non linéaires Q_A et Q_B étant pris quelconques au départ, nous obtenons des termes non linéaires quelconques. La liaison entre les champs et les inductions n'est donc pas fixée. Au contraire, Born partant d'une fonction lagrangienne particulière obtient une relation déterminée entre les champs et les inductions. Si alors on adopte les hypothèses de Born, la relation qui existe entre champs et inductions vient déterminer des termes Q .

Mais ce qui est intéressant, c'est, en laissant quelconques les termes non linéaires Q_A et Q_B , d'obtenir exactement les équations de l'électromagnétisme non linéaires posées au début de ce chapitre, en conservant les définitions mêmes de M. Louis de Broglie pour les grandeurs électromagnétiques (compte tenu de la différence entre champs et inductions), et en constatant que les termes non linéaires produisent les polarisations $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\mathcal{E}}$. Il y a là un point de départ pour un rapprochement entre les théories de la Microphysique et les théories unitaires macroscopiques.

17. Retour à la théorie de Born et Infeld. — Born est parti d'une fonction lagrangienne de la forme écrite plus haut

$$L^0 = b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} (\vec{\mathcal{B}}^2 - \vec{\mathcal{E}}^2)} - 1 \right).$$

Posons

$$\mathbf{F} = \vec{\mathcal{O}}^2 - \vec{\mathcal{E}}^2, \quad \mathbf{G} = \vec{\mathcal{O}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

avec cette notation, on a

$$\mathcal{L}^2 = b^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} \mathbf{F}} - 1 \right].$$

Infeld ⁽¹⁾ a adopté une forme légèrement différente pour $\mathcal{L}$ en partant de l'idée d'une théorie unitaire caractérisée par un champ unifié u_{kl} . On peut le décomposer en partie symétrique et partie antisymétrique

$$u_{kl} = g_{kl} + f_{kl}, \quad g_{kl} = g_{lk}, \quad f_{kl} = -f_{lk}.$$

Il a posé

$$\mathcal{L}_I = b^2 \left[\sqrt{1 + \frac{\mathbf{F}}{b^2} - \frac{\mathbf{G}^2}{b^4}} - 1 \right].$$

Au lieu de $\mathbf{G}^2$ on peut poser $\lambda \mathbf{G}^2$, alors pour $\lambda = 1$ on a $\mathcal{L}_I$ et pour $\lambda = 0$ on a $\mathcal{L}$. Mais Born n'a pas trouvé convaincant le raisonnement conduisant à $\mathcal{L}_I$.

Schrödinger ⁽²⁾ a trouvé une autre forme intéressante de fonction lagrangienne. Il pose

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{O}} - i\vec{\mathcal{O}}, \quad \vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{E}} - i\vec{\mathcal{E}},$$

alors la fonction lagrangienne appropriée est

$$\mathcal{L}_{II} = \frac{\mathcal{F}^2 - \mathcal{G}^2}{\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}},$$

l'avantage de cette expression est d'être rationnelle, mais la racine carrée réapparaît dès qu'on veut effectuer un calcul.

Weiss ⁽³⁾ a proposé de remplacer $\mathcal{L}_I$ par

$$\mathcal{L}_{III} = \sqrt{1 + 2(\mathbf{F} + i\mathbf{G})} - 1$$

mais ses arguments n'ont pas convaincu Born.

La seule exigence générale dans la recherche d'un lagrangien a été posée par Infeld ⁽⁴⁾ : il exige que *les composantes du champ $\mathcal{F}_{kl}$, c'est-à-dire $(\vec{\mathcal{O}}, \vec{\mathcal{E}})$ ne présentent aucune singularité.* Schrödinger ⁽⁵⁾

⁽¹⁾ BORN et INFELD, *Nature*, t. 133, 1933, p. 970 et 1004; *Proc. Roy. Soc.*, t. 149, 1934, p. 423.

⁽²⁾ SCHRÖDINGER, *Proc. Roy. Soc.*, t. 150, 1933, p. 463.

⁽³⁾ P. WEISS, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 33, 1957, p. 79.

⁽⁴⁾ L. INFELD, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 32, 1936, p. 127; vol. 33, 1937, p. 70.

⁽⁵⁾ E. SCHRÖDINGER, *Proc. Roy. Irish Acad.*, t. 49, A, 1943, p. 43.

a développé une théorie unitaire purement affine dont la partie électromagnétique était à rapprocher de la théorie de Born et Infeld.

Ces dernières années, des rapprochements beaucoup plus intéressants ont été faits entre la dernière théorie d'Einstein et l'électromagnétisme non linéaire de Born et Infeld par M^{me} Tonnelat⁽¹⁾ et par M^{lle} Mavridès⁽²⁾.

Ainsi la théorie de l'électromagnétisme non linéaire de Born et Infeld se trouve en connexion, d'une part avec la théorie du champ unifié d'Einstein, d'autre part avec la théorie non linéaire du photon de M. Louis de Broglie. C'est le fait d'être située entre ces deux théories extrêmes qui confère tant d'intérêt actuel à l'électromagnétisme non linéaire.

(¹) M. A. TONNELAT, *J. Phys. Rad.*, vol. 16, 1955, p. 21; *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements* (Gauthier-Villars, Paris, 1955).

(²) M^{lle} MAVRIDÈS, *J. Phys. Rad.*, vol. 16, 1955, p. 482.

BIBLIOGRAPHIE.

BORN (M.) :

- a. *Nature*, t. 132, 1933, p. 282.
- b. *Proc. Roy. Soc., A*, t. 143, 1934, p. 410.
- c. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 7, fasc. IV, 1937, p. 155-265.

BORN (M.) et INFELD (L.) :

- a. *Nature*, t. 133, 1934, p. 970 et 1004.
- b. *Proc. Roy. Soc., A*, t. 144, 1934, p. 425.

BROGLIE (L. DE) :

- a. *C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 813.
- b. *Une nouvelle conception de la lumière* (*Act. scient. et industr.*, Hermann, Paris, 1934).
- c. *L'électron magnétique* (Hermann, Paris, 1934).
- d. *C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 265.
- e. *Une nouvelle théorie de la lumière* (2 vol., Hermann, Paris, 1940).

J.-L. DESTOUCHES et F. AESCHLIMANN, *Les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle* (*Actualités scientifiques*, n° 1277, Hermann, Paris, 1959).

J.-L. DESTOUCHES et PHAM XUÂN YÊM, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 2959.

INFELD (L.), *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 32, 1936, p. 127 ; t. 33, 1937, p. 70.

MAVRIDÈS (S.), *J. Phys. Rad.*, t. 16, 1955, p. 482-488.

MIE (G.), *Ann. Phys.*, 4^e série, t. 37, 1912, p. 511 ; t. 39, 1912, p. 1 ; t. 40, 1913, p. 1.

SCHRÖDINGER (E.) :

- a. *Proc. Roy. Soc., A*, t. 150, 1935, p. 465.
- b. *Proc. Roy. Irish. Acad., A*, t. 49, 1943, p. 43.

TONNELAT (M.-A.) :

- a. *J. Phys. Rad.*, t. 12, 1951, p. 81.
- b. *J. Phys. Rad.*, t. 16, 1955, p. 21.
- c. *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements* (Gauthier-Villars, Paris, 1955).

WEISS (P.), *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 33, 1937, p. 79.

INDEX

(Les numéros renvoient aux pages.)

A

accélération, 6, 112, 113.
algorithme, 66.
anneau, 87.
appareil de mesure, 164.
autopotentiel, 170.
autosource, 170.

B

BONJEAN, 184.
BORN (M.), 217, 218, 228, 237.
BOURBAKI, 64.
BROGLIE (Louis DE), 149, 156, 161, 168, 172,
185, 194, 218, 221, 236.

C

CAZIN, 64, 77.
Champ, 158.
— électrique, 215.
— extérieur, 153.
— magnétique, 215, 224.
CHURCH, 158.
Composante, 80.
— droite, 82.
— gauche, 82.
Conditions aux limites, 166.
— de compatibilité, 196.
Corpuscule, 63, 149, 151.
— élémentaire, 151.
Courant électrique, 216.
Crochet de Poisson, 132.

D

Densité de charge électrique, 216.
— de moment électrique, 218.
— de moment magnétique, 218.
 δ - anneau, 87.
dérivée partielle, 88.
— totale, 95.

DESTOUCHES, 8, 36, 54, 64, 66, 77, 149, 157,
164, 174, 178, 183, 196, 223.
différentielle symbolique, 87.
— totale, 90.
DIRAC, 178, 183, 185, 193.
Double solution, 149, 161, 168, 171.

E

échelle de temps, 5.
— de temps cinématique, 6.
EINSTEIN, 238.
ensemble, 4.
environnement, 160.
équation de champ, 227, 230.
— d'ondes, 168, 175, 179, 192, 196.
équipollence, 65.
Espace (R_u) des fonctions u , 155.
EUCLIDE, 3, 151.
EULER, 165, 173.

F

FÉVRIER (P.), 68, 152.
Fluide associé, 163.
Fonction d'ondes, 156.
— lagrangienne, 121.
— linéaire, 93.
FONTENÉ, 182.
Force, 7, 165.
— accélératrice, 7, 37.
FRÉCHET, 150.
Fusion, 197.

G

grandeur, 75, 76.
gravitation (loi de), 11.

H

HEISENBERG, 180, 187, 218.

I

Induction électrique, 215, 226.
— magnétique, 215, 224.

INFELD, 236, 237.
interprétation hydrodynamique, 162.
intégrale d'un système, 99.
— première, 99, 102, 119.
somorphisme, 65.

J

JANCEL, 147.
JORDAN, 218.

K

KRONIG, 218.

L

LAGRANGE, 121, 166, 172, 217.
LAPLACE, 216.
LEIBNIZ, 151.
LE ROUX, 60.
Loi de continuité du mouvement, 5.
— de la gravitation universelle, 11.
LORENTZ, 184, 215, 216.

M

MACH, 61.
Matrice α de Dirac, 178, 185.
— σ de Pauli, 175.
MAVRIDÈS, 238.
MAXWELL, 215, 218, 236.
Mécanique ondulatoire, 63, 156.
MIE, 215, 218, 236.
MINKOWSKI, 179, 195.
mouvement relatif, 125.
MURARD (R.), 196.

N

NEUMANN (von), 179, 184, 195.
Nucléon, 192.

O

Onde fonctionnelle, 158.
— physique, 158.
— prévisionnelle, 158.
Opérateur, 64, 75.
— de charge, 192.
— de masse, 192.
— vectoriel, 77.

P

PAINLEVÉ, 61.
PAULI, 174, 192.
Partie d'un système, 63.
— non spécifiée, 154.
— spécifiée, 153.
Photon, 193.
POINCARÉ, 61.

Point valorisé, 158.
— variable libre, 63, 158.
Postulat de prévision, 133.
— fondamental de la Cinématique, 5.
— quantique, 134.
Potentiel, 167.
— classique, 14, 16.
— complet, 169.
— complexe, 170.
— des vitesses, 162, 164.
— partiel des vitesses, 163.
— scalaire, 216.
— vecteur, 216.
Principe de la Cinématique, 5, 108.
— de l'action et réaction, 9, 39, 42, 122.
— de la masse, 10, 123.
— de l'atomisme 5, 105.
— des équations différentielles, 6, 118.
— de limitation, 152.
— de l'inertie, 8, 44-47, 121.
— d'objectivité matérielle, 43.
— de représentation géométrique, 3, 106.
— de superposition, 10, 34, 123.
— du rattachement spatial, 157.

Q

Quadrivecteur courant, 216.
— potentiel, 216.

R

repère commutatif, 79.
— non commutatif holonome, 79.
— non commutatif non holonome, 80.
Représentation fonctionnelle, 154.
ROUCHÉ, 182.

S

SCHRÖDINGER, 237.
Singularité, 156.
source, 165.
Spin, 174.
— isotopique, 192.
Structure algébrique, 65.
— formelle, 64.
Système d'équations différentielles, 99.
— mécanique, 3.
— physique, v, 38, 152.

T

Temps, 2.
THARRATS (J.), 161.
Théorie déductive, 66.
— de la double solution, 149.
— du photon, 61.

TONNELAT (M^{me} M.-A.), 238.
trièdre principal, 13.

U

Univers, 12, 152.

V

Variable désignative, 157.

Variable libre, 157.
— temporelle, 2.

VIGIER (J.-P.), 149.

Vitesse, 6.

Y

YUKAWA, 161.

TABLE DES SYMBOLES

(Les numéros renvoient aux pages.)

Alphabets utilisés.

- Les capitales romaines désignent des points, des variables.
- Les petites capitales romaines désignent des constantes.
- Les capitales italiques désignent des matrices.
- Les minuscules italiques désignent des nombres, des variables numériques, des constantes.
- Les capitales rondes désignent des expressions analytiques.
- Les capitales rondes grasses désignent des opérateurs vectoriels
- Les capitales antiques désignent des ensembles.
- Les lettres grasses désignent des vecteurs.
- Les lettres gothiques désignent des opérateurs.

Signification des lettres.

- A, algorithme, 71; fonction des forces, 167.
- a , nombre, 51.
- α , anneau d'opérateurs, 73.
- $\vec{a}$, potentiel vecteur fonctionnel, 219.
- $\mathfrak{A}$, opérateur potentiel vecteur, 73.
- A**, potentiel vecteur fonction de point donnée, 73, 163.
- $\mathfrak{A}$, composante d'un opérateur vectoriel, 82; opérateurs liés à un changement de repère, 111.
- $\tilde{\mathfrak{A}}$, opérateur potentiel vecteur fonctionnel, 219.
- α , composante d'un opérateur vectoriel, 81; opérateur d'un corpuscule, 192, 194, 199.
- , appareil, 164.
- B, potentiel de pression, 167.
- b , constante de Born, 217.
- $\vec{B}$, induction magnétique, 215.
- $\mathfrak{B}$, composante d'un opérateur vectoriel, 82; opérateurs liés à un changement de repère, 111.
- b , composante d'un opérateur vectoriel, 81; opérateur d'un corpuscule, 194.
- c , vitesse de la lumière, 163.
- $\mathfrak{C}$, composante d'un opérateur vectoriel, 82.
- c , composante d'un opérateur vectoriel, 81.
- D, déterminant, 182.
- d , symbole de différentiation, 6.
- d , symbole de différentiation symbolique, 86.
- $\vec{D}$, induction électrique, 215.

- $\vec{D}$, opérateur induction électrique, 227.
 ∂ , symbole de dérivation partielle, 78, 88.
 E_{ij} , matrice unité δ_{ij} , 184.
 e , base des logarithmes népériens, 167.
 $-e$, charge de l'électron, 175.
 $\mathcal{E}$, expression analytique, 174.
 $S(u)$, membre d'une équation, 174.
 $\mathcal{E}$, champ électrique fonctionnel, 215.
 $\mathcal{E}$, opérateur de champ électrique, 73; vecteur de base, 111.
 $\mathbf{E}$, champ électrique donné, 73.
 $\mathbf{E}$, ensemble, 45.
 $F(P, t)$, fonction, champ, 153.
 $F[u]$, fonctionnelle de u , 156.
 f , fonction 165.
 $\mathcal{F}$, famille d'ensembles, 66; quantité électromagnétique, 219.
 $\mathcal{F}_{23}$, tenseur électromagnétique, 216.
 $\mathbf{F}$, force, 46, 165.
 $\mathbf{f}$, force de Lorentz, 216.
 $\mathbf{f}$, opérateur fonction, 88.
 G , barycentre, 117.
 $\mathcal{G}$, opérateur fonction des q_i et p_i , 131.
 g , opérateur fonction, 88.
 H , composante de champ magnétique, 176.
 h , constante de Planck, 134.
 $\mathcal{H}$, opérateur lié à u , 133.
 $\mathcal{H}$, opérateur champ magnétique, 73.
 $\mathcal{H}_{23}$, tenseur électromagnétique, 216.
 $\mathcal{H}$, champ magnétique fonctionnel, 215.
 $\mathbf{H}$, champ magnétique donné, 73, 175.
 $\mathcal{H}$, opérateur hamiltonien, 131, 175.
 h , opérateur fonction, 92.
 h , constante de Planck divisée par 2π , 134, 168.
 i , unité imaginaire, 167.
 $\vec{i}$, vecteur courant, 215.
 $\mathbf{i}$, vecteur unitaire de l'axe OX du repère, 77.
 $\mathfrak{I}$, partie imaginaire de, 170.
 $\mathbf{i}$, vecteur courant, 73.
 $\mathcal{I}$, opérateur courant, 73; vecteur de base du repère mobile, 79.
 $\vec{j}$, vecteur courant de polarisation, 218.
 $\mathbf{j}$, vecteur unitaire de l'axe OY du repère, 77.
 $\mathcal{J}$, vecteur de base du repère mobile, 79.
 K , constante de Louis de Broglie, 219.
 κ , constante égale à $-\frac{m}{\hbar}$, 163, 168.
 k , constante égale à $\frac{1}{\hbar}$, 167.
 $\mathbf{K}$, vecteur unitaire de l'axe OZ du repère, 77.

- $\mathcal{K}$, vecteur de base du repère mobile, 79.
 $\mathcal{L}$, fonction lagrangienne, 217.
 $\mathcal{L}$, opérateur fonction de Lagrange, 131; opérateur linéaire de l'équation de Dirac, 184.
 $\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B, \mathcal{L}_C, \mathcal{L}_D, \mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-,$ opérateurs linéaires d'un corpuscule fondu, 195, 198, 202.
 l , composante d'opérateur vectoriel, 80.

 M , point matériel, 6; point figuratif d'un corpuscule, 110, 156.
 m , masse d'un point matériel, 11; masse d'un corpuscule, 115, 163.
 m_0 , masse au repos d'un corpuscule, 178.
 $\mathcal{M}$, morcellements, 105, 151.
 $\vec{\mathcal{M}}$, densité de moment magnétique, 218.
 $\mathcal{M}_{ij}$, tenseur de polarisation, 218.
 $\mathcal{M}$, opérateur moment cinétique, 115.
 $\mathcal{M}$, masse totale du système, 25.
 M , espace-temps de Minkowski, 179.
 m , composante d'opérateur vectoriel, 80; opérateur de masse, 192.

 $\mathcal{N}_0$, autopotentiel scalaire, 170, 177, 180.
 $\mathcal{N}_i$, expression analytique de u , 170, 181, 186, 193, 197.
 $\vec{\mathcal{N}}$, vecteur, expression analytique de u , 177.
 n , composante d'opérateur vectoriel, 80.

 o , zéro, 9, 14.
 $\mathcal{O}$, ensemble d'opérations, 66.
 o , opérateur zéro, 74, 81.
 $\mathcal{O}$, ensemble vide, 87.

 P , point variable, 157.
 p , proposition, 50; pression, 165.
 $\vec{\mathcal{P}}$, densité de moment électrique, 218.
 $\mathcal{P}$, opérateur de symétrie spatiale, 55; opérateur impulsion non linéaire, 180.
 p , opérateur composante de la rotation, 111; opérateur moment conjugué, 131; opérateur impulsion, 178.
 $\mathcal{P}$, opérateur quantité de mouvement, 115.

 Q , terme non linéaire de l'équation d'ondes physique, 169; champs du photon dérivés des termes non linéaires, 223.
 Q_1 , première composante de Q , 175.
 $Q_A, Q_B, Q_C, Q_D, Q_+, Q_-, Q^+,$ termes non linéaires d'un corpuscule fondu, 196, 203.
 Q_J , autopotentiel, 176.
 Q_i , composante de Q , 175, 180, 193.
 $Q_b, Q_D, Q_E, Q_H, Q_V, Q_d, Q_e,$ termes non linéaires électromagnétiques, 225, 226, 224, 229, 230, 228, 231.
 Q , matrice des termes non linéaires, 184, 193.
 q , proposition, 50.
 q , opérateur composante de la rotation, 111; opérateur coordonnée, 131; opérateur de charge, 192.

 (R_u) , espace des fonctions u , 155.
 $\mathcal{R}$, opérateur de densité électrique, 73; partie réelle de, 170.
 r , opérateur composante de la rotation, 111.

- S , système mécanique, 3.
 $\mathcal{S}$, système vectoriel, 89.
 s , quadrivecteur courant, 216.
 s , opérateur de spin, 175, 222.

 T , variable temporelle, 157.
 t , instant, 1, 9, 158.
 $\mathcal{T}$, opérateur énergie cinétique, 115.
 Th , théorie, 67.

 U , fonction de forces, 128, 167.
 $\hat{U}$, tenseur, 32.
 $\mathcal{U}$, opérateur fonction de forces, 127.
 u , vecteur unitaire, 27.
 u , proposition, 50; fonction d'onde physique d'un corpuscule, 155.
 u , composante de u , 155, 175, 181, 191.
 u^+ , onde physique à énergie positive, 194.
 u^- , onde physique à énergie négative, 194.

 V , énergie potentielle, 168.
 V_c , potentiel total, 170.
 $\mathcal{V}$, opérateur vectoriel, 80.
 v , onde physique d'une antiparticule, 194.
 $\mathcal{V}$, potentiel scalaire, 215.
 v , vitesse du fluide associé, 163; vitesse, 6, 216.
 $\mathcal{V}$, opérateur potentiel scalaire, 219.

 $\mathcal{W}$, opérateur vectoriel, 82.
 w , vecteur lié à la vitesse d'un fluide, 163.

 $X[u, t]$, fonctionnelle de prévision, 156.
 $\mathcal{X}$, composante de l'opérateur de position, 78.
 x_i , coordonnée, 6, 193.
 x_4 , 4^e coordonnée, *ict*, 216.

 $\mathcal{Y}$, espace des fonctions d'ondes, 75, 108.
 $\mathcal{Y}$, composante de l'opérateur de position, 78.
 $\mathcal{Z}$, composante de l'opérateur de position, 78.

Lettres grecques.

 α, β , éléments de matrice de rotation, 82.
 α, β , indices variant de 1 à 4, 216.
 α_i , opérateur d'un corpuscule de Dirac, 178.
 Γ , accélération, 6; opérateur accélération, 112.
 Υ_i , opérateur de von Neumann d'un corpuscule de Dirac, 179.
 Δ , déterminant, 22, 189.
 Δ , laplacien, 167.
 δ_{ij} , symbole de Kronecker, 184.
 ε , nombre arbitrairement petit, 9; charge électrique d'un corpuscule, 163.
 $\in$, appartient à, 87, 155.
 θ , variable temporelle quelconque, 2; température, 165.
 λ , fonction d'interaction, 9.

- μ_0 , masse d'un corpuscule fondu, masse du photon, 195.
 π , rapport de la circonférence au diamètre, 134.
 ρ , densité d'un fluide, 162; densité de charge électrique, 215, 228.
 Σ , symbole de sommation, 14.
 σ , terme de source, 165; densité de charge électrique de polarisation, 218, 228.
 σ , opérateur moment cinétique, 116; opérateur de spin, 190.
 τ , opérateur de spin isotopique, 192.
 Φ , potentiel des vitesses, 163.
 Φ , composante de force accélératrice, 6.
 Φ_{ik} , fonction d'ondes d'un photon, 195.
 Φ , force accélératrice, 6.
 φ , phase d'une fonction d'ondes, 143.
 φ_i , quadrivecteur potentiel, 216.
 Φ , force accélératrice, 34.
 χ , fonction exprimant une différentielle totale, 91.
 Ψ , intégrale première, 100; fonction d'ondes prévisionnelle, 140, 159.
 ψ , fonction d'ondes de mécanique ondulatoire, 156.
 Ω , domaine d'opérateurs, 65; extension en phase, 140.
 Ω , opérateur de l'électromagnétisme, 220.

SYMBOLES OPÉRATOIRES.

Symboles de relations.

- $\in$, appartient à, 87, 155.
 $=_d$, égal par définition, 18.
 $=$, égalité numérique, 2.
 $\equiv$, égalité d'opérateurs, 80.
 $\overset{\circ}{=}$, relation entre opérateurs, 73.
 $\equiv$, relation d'équivalence, 73.
 $\simeq$, relation d'équivalence de systèmes de vecteurs glissants, 48.
 $\neq$, différent de, 34.
 $<$, plus petit que, 9.
 $>$, plus grand que, 9.
 $\rightarrow$, entraîne 44, tendant vers, 44.
 $\subseteq$, inclus dans, 49.
 $\Rightarrow$, correspond, 142.
 $\Leftrightarrow$, correspond biunivoquement, 142.

Symboles d'opérations.

- $+$, addition, 18.
 $-$, soustraction, 9, 70.
 $\cup$, réunion, 142.
 $\cap$, intersection, 70.
 $\forall$, pour tout ..., 44.
 $\exists$, il existe un ... tel que, 44.
 $|$, longueur d'un vecteur, 9; module, 162.
 $\|$, norme, 121.
 2 , élévation au carré, 162.
 $\sqrt{\quad}$, racine carrée, 163.
 Σ , sommation, 14.
 $\int$, intégrale, 167.

- [] crochets de Poisson, 86.
 +, passage à l'anticorpuscule, 194.
 *, passage à l'imaginaire conjugué, 194.
 ●, opérateur multiplication par, 88.
 $\wedge$, produit vectoriel, 14.
 $\odot$, opération de composition des matrices, 197.
 (F/g), substitution de F à g dans ce qui est écrit à droite, 91.

Opérateurs particuliers.

- sing, opérateur fonctionnel faisant passer de u à M , 156.
 arg, argument imaginaire de, 163.
 d , symbole de différentiation, 6.
 d , symbole de différentiation symbolique, 86.
 $\frac{d}{dt}$, symbole de dérivation symbolique par rapport à t , 86.
 div, divergence $\text{div } \vec{V} = {}_d \nabla \vec{V}$, 165.
 grad, gradient, $\text{grad } f = {}_d \nabla f$, 163.
 rot, rotationnel, $\text{rot} = {}_d \nabla \wedge$, 169.
 $\frac{\partial}{\partial t}$, dérivation par rapport à t , 86, 165.
 $\frac{\partial}{\partial x_i}$, dérivation par rapport à x_i , 193.
 ∂ , symbole de dérivation partielle, 78, 88.
 ∇ , nabla, opérateur de dérivation, 168.
 ∇ , nabla, opérateur de dérivation dans l'espace à trois dimensions, 165.
 $\diamond$, lor, opérateur de dérivation dans l'espace-temps, 179.
 $\triangle$, laplacien $\triangle = {}_d \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \nabla^2$, 167.
 $\square$, dalembertien $\square = {}_d \partial_t^2 - \triangle = -\diamond^2$, 234.
 $\mathbf{0}$, opérateur zéro, 74, 81.
 $\mathbf{1}$, opérateur unité, 88.
 $\Re$, partie réelle de, 170.
 $\Im$, partie imaginaire de, 170.

Constantes.

- 0, zéro, 9, 14.
 1, un, 2.
 2, deux, 2.
 $\emptyset$, ensemble vide, 87.
 $\mathbf{0}$, opérateur zéro, 74, 81.
 $\mathbf{1}$, opérateur unité, 88.
 π , rapport de la circonférence au diamètre, 134.
 b , constante de Born, 217.
 c , vitesse de la lumière, 163.
 e , base des logarithmes népériens, 167.
 $-e$, charge de l'électron, 175.
 h , constante de Planck, 134.
 $\hbar$, constante de Planck divisée par 2π , 134, 168.
 k , inverse de $\hbar$, 167.
 κ , constante liée à h , $\kappa = -\frac{m}{\hbar}$, 163, 168.
 K , constante de Louis de Broglie de la théorie du photon, 219.
 m , masse d'un point matériel, 11; masse de l'électron, masse d'un corpuscule, 115, 163.
 μ_0 , masse du photon, 195.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION.....	v

PREMIÈRE PARTIE.

MÉCANIQUE CLASSIQUE.

Chapitre I. — Les principes de la Mécanique newtonienne.....	1
Chapitre II. — Propriétés des trièdres principaux.....	13
Chapitre III. — Nouvelle forme des principes de la Mécanique.....	30

DEUXIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

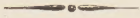
Chapitre I. — Structure formelle d'une théorie physique.....	63
Chapitre II. — La dérivation des opérateurs.....	75
Chapitre III. — Aspects opératoires de la Mécanique ondulatoire.....	105
Chapitre IV. — La méthode des mouvements associés.....	140

TROISIÈME PARTIE.

THÉORIE FONCTIONNELLE DES CORPUSCULES.

Chapitre I. — Représentation des corpuscules.....	149
Chapitre II. — Extensions de la théorie fonctionnelle des corpuscules.....	173
CONCLUSION.....	207
BIBLIOGRAPHIE.....	211
L'ÉLECTROMAGNÉTISME NON LINÉAIRE ET LES PHOTONS.....	215
BIBLIOGRAPHIE.....	239
INDEX.....	241
TABLE DES SYMBOLES.....	245
TABLE DES MATIÈRES.....	251

DEUXIÈME THÈSE.



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

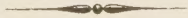


L'Électromagnétisme non linéaire et les photons

Vu et approuvé
Paris, le 9 juin 1957.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
Jean SARRAILH



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

154576-60

Dépôt légal, Imprimeur, 1960, N° 1328

Imprimé en France.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

154576-60

Dépôt légal, Imprimeur, 1960, N° 1328

Imprimé en France.